

## CAPÍTULO 2

### TEORÍA DE WAVELETS

Para nuestro estudio diremos que la Teoría de *Wavelets* es el conjunto formado por: las *wavelets*, la Transformada Continua de Wavelets y la Transformada Discreta de Wavelets. De este modo nos referiremos de aquí en adelante a lo que es y lo que comprende ésta Teoría la cual es una herramienta matemática reciente, basada en la Teoría de Conjuntos y representaciones cuadradas integrables, que permiten presentar una señal o un campo tanto en escala, espacio y posibles direcciones [JAL00]. En este Capítulo se explicará lo que son las *wavelets* dando algunos ejemplos de ellas, se definirán las Transformadas Continua y Discreta de *Wavelets* y se expondrán las principales ventajas que tiene sobre las Transformadas de Fourier.

#### 2.1 Introducción

La Teoría de Wavelets trabaja de manera similar que la Teoría de Fourier, la cual dice que una señal se compone de una serie de funciones sinusoidales y de ésta forma es más sencillo su análisis. Recordando un poco, la transformada de Fourier (FT) de la señal  $x(t)$  esta definida por:

$$FT(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (5)$$

La Transformada de Fourier trabaja bien si la señal  $x(t)$  esta compuesta de unos cuantos componentes estacionarios [ALA03]. Sin embargo, algún cambio repentino en el tiempo, en una señal  $x(t)$  no estacionaria, es separada del eje de frecuencias. Para contrarrestar estas desventajas se ha modificado la Transformada de Fourier dando origen a lo que es la *Short Time Fourier Transform* (STFT) también conocida como la Transformada de Gabor. La STFT aplica una función  $g(t)$  utilizada como ventana de análisis que se mueve sobre los datos para determinar el espectro. La expresión que nos permite este análisis es:

$$STFT(b, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g^*(t - b)e^{-i2\pi ft} dt \quad (6)$$

donde la variable  $b$  indica la posición en la que se hace el análisis y  $*$  denota el complejo conjugado. La desventaja que presenta esta transformada es que la ventana de análisis es de un tamaño fijo y por eso no puede adaptarse a las características de la señal en ciertos puntos interesantes de analizar.

Por lo visto anteriormente es que ha cobrado tanta fuerza la Teoría de Wavelets, dado que mantiene las ideas principales de un análisis tiempo-frecuencia utilizando una ventana de análisis diferente. En este caso se requiere de una *wavelet* que examina cuidadosamente a la señal de interés. Recordando un poco la historia podemos decir que:

"En los años 88 y 89, los trabajos de Daubechies, que construyó wavelets de soporte compacto, y Mallat que estableció la conexión con el procesado discreto de la señal, determinaron la gran difusión de la transformada wavelet en el ámbito del procesado de la señal." [GAR03].

## 2.2 ¿Qué son las wavelets?

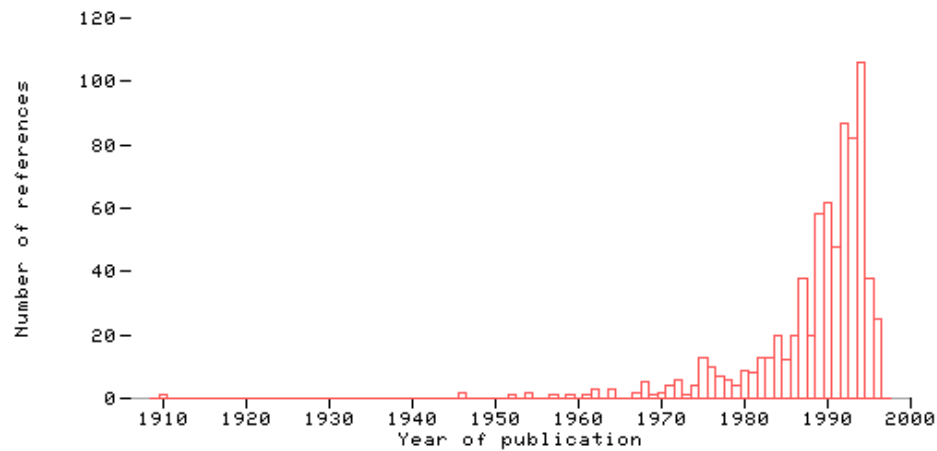
Las *wavelets* son familias de funciones que se encuentran en el espacio y se emplean como funciones de análisis, examinan a la señal de interés para obtener sus características de espacio, tamaño y dirección; la familia está definida por:

$$h_{a,b} = \frac{h\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\sqrt{|a|}}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (7)$$

y son generadas a partir de funciones madre  $h(x)$ . A esa función madre se le agregan un par de variables que son la escala ( $a$ ) que permite hacer dilataciones y contracciones de la señal y la variable de traslación ( $b$ ), que nos permite mover a la señal en el tiempo. Estas variables son números reales y obviamente para una escala de 0 la función se indetermina. Las *wavelets* se usan en el procesamiento de señales por sus características, Jalali las describe a continuación:

*"They have the best possible simultaneous concentration in time and in frequency, the set of their finite linear combinations is closed under Fourier Transforms, pointwise multiplication and convolution. The scalar product of any two members of this set is given by an explicit formula. And they are among the very few classes of functions where the transition from one to more dimensions is immediate...."* [JAL00].

Existen diferentes *wavelets* que ya son utilizadas de forma constante y que tienen definiciones establecidas. Sin embargo, la elección de un tipo de *wavelet* depende de la aplicación específica que se le vaya a dar. Actualmente existen muchas aplicaciones en las que las *wavelets* actúan de manera directa, de acuerdo con Kobayashi [KOB99] las patentes en Estados Unidos durante el periodo de 1991 a 1998 bajo la palabra *wavelet* se incrementaron de 3 a 92, lo que nos permite tener una idea de su utilidad y lo que en un futuro se puede esperar de ellas. Por otro lado la investigación en este campo se ha incrementado notablemente como lo vemos en la figura 4.



**Figura 4.** Número de publicaciones por año del tema *Wavelet*.

### 2.3 Momentos de desvanecimiento

Este concepto es muy importante, ya que nos permite conocer la forma de la *wavelet* y es un parámetro para saber que tan hábil es la *wavelet* para suprimir un polinomio dado. La suavidad de la *wavelet* esta limitada por el número de momentos de desvanecimiento que tenga. El  $i$ -ésimo momento de la *wavelet* se calculan con la siguiente integral [POL96]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)x^i dx = 0 \quad (8)$$

de lo anterior se determina que una function tiene  $v$  momentos de desvanecimiento si la integral es cero para  $i = 0, \dots, v - 1$ . De donde se toma que todas las señales que tengan la forma polinomial del tipo:

$$y(x) = \sum_{m=0}^v c_m x^m \quad (9)$$

tienen cero coeficientes de wavelet, el concepto de coeficientes se explicará más adelante en la sección 2.5.2. El orden de una transformada de *wavelet* es, normalmente, dado por el número de momentos de desvanecimiento que existan. Otra forma de ver este concepto es pensar en que la palabra momento se refiere a un promedio, así que cuando el valor promedio de una *wavelet* es cero, se tiene un momento de desvanecimiento, y los polinomios de grado menor a  $v$  serán eliminados.

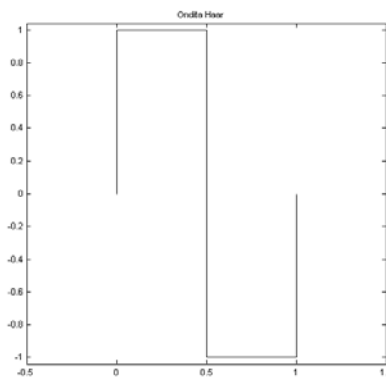
Existen otras características importantes de las *wavelets* tales como el soporte compacto, que es la propiedad de que la wavelet sea de duración finita, lo que permite una menor complejidad en los cálculos, mejor resolución en tiempo y pobre resolución en frecuencia [POL96]. También está la propiedad de simetría que permite que los filtros sean de fase lineal. La ortogonalidad es la propiedad que se logra cuando el producto punto de dos vectores es igual a cero y es importante en los estudios encontrar este tipo de características para que los análisis sean estables. Por esa razón las simulaciones futuras tomarán en cuenta a las *wavelets* ortogonales.

## 2.4 Ejemplos de wavelets

Dentro de las *wavelets* más famosas y utilizadas podemos citar la *Haar* que es la más simple y la más antigua, se describe con la siguiente función :

$$h(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1; & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0; & \text{otro valor.} \end{cases} \quad (10)$$

y su gráfica se muestra en la figura 5. Ahí podemos ver que efectivamente es una *wavelet* sencilla. Sin embargo es muy utilizada para análisis de señales usando transformadas discretas y continuas. Tiene un sólo momento de desvanecimiento.

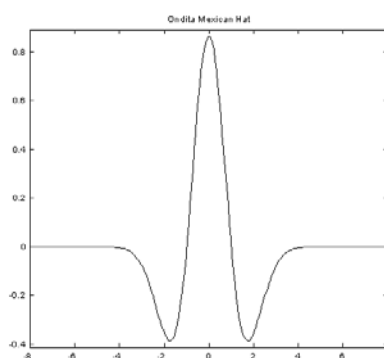


**Figura 5.** Wavelet Haar.

Otra *wavelet* que es muy utilizada en el análisis de señales es la *Mexican hat*. Cuyo nombre proviene de la forma que describe su gráfica que esta definida por:

$$mexh(x) = \frac{2(1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\pi^{1/4}\sqrt{3}} \quad (11)$$

Esta *wavelet* es la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana. Como vemos en la figura 6 es simétrica, característica que le permite examinar a las señales de un modo simétrico y lineal en la fase, igual que la ondita *Haar*. No todas las onditas son simétricas pero tambien se utilizan en los análisis dependiendo del objetivo que se quiera lograr con ellas.

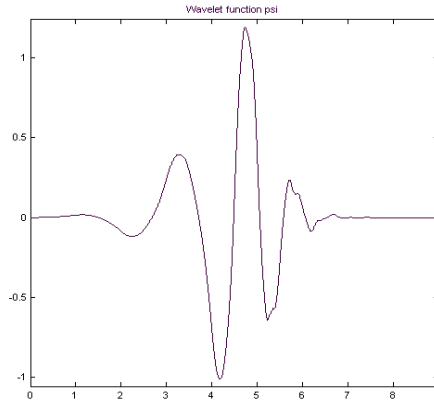


**Figura 6.** Wavelet Mexican Hat.

Podemos nombrar otra *wavelet* como *Daubechies* que puede tener un orden  $N$  dependiendo del número de momentos de desvanecimiento que se deseen,  $N$  es un entero positivo y denota el número de coeficientes de filtro que tiene esa *wavelet*; por ejemplo la *Daubechies* de orden 1 (*db1*) es la *wavelet Haar* que hemos visto anteriormente.

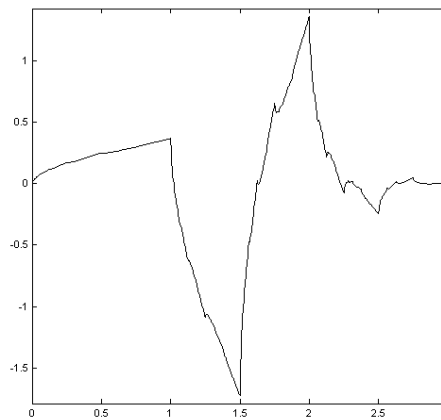
En la figura 7 podemos ver la *wavelet Daubechies* de orden 5 (*db5*), donde el número de momentos de desvanecimiento es igual al orden de la *wavelet*. Para este caso la *wavelet db5* tienen los siguientes coeficientes de filtro pasa bajas de descomposición  $\{c_{db5}\} = \{0.0033, -0.0126, -0.0062, 0.0776, -0.0322, -0.2423, 0.1384, 0.7243, 0.6038, 0.1601\}$ . Podemos ver que existe una relación del doble entre los números de coeficientes de filtro y los momentos de desvanecimiento.

Esta *wavelet* cuenta con las características de ortogonalidad y biortogonalidad, además de que se pueden realizar las transformadas de *wavelets* discretas y continuas con ella.



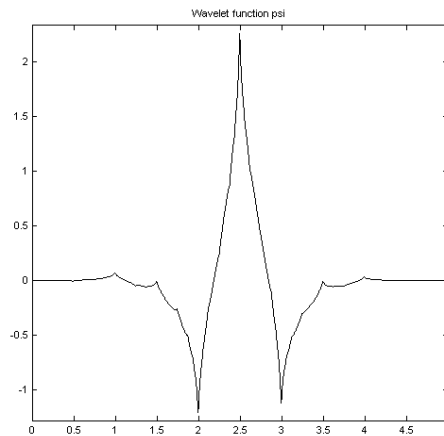
**Figura 7.** Wavelet Daubechies de orden 5.

La *wavelet Symmlet* posee las características de ortogonalidad y biortogonalidad y también permite realizar las transformadas continua y discreta de *wavelets*. Posee la cualidad de tener diferentes ordenes, de este modo podemos ver en la figura 8 la *wavelet Symmlet* de orden 2 (*sym2*) cuyos coeficientes de filtro pasa bajas de descomposición son  $\{c_{sym2}\} = \{-0.1294, 0.2241, 0.8365, 0.4830\}$ . Como se aprecia es asimétrica. El número de momentos de desvanecimiento es directamente proporcional al orden de la *wavelet*.



**Figura 8.** Wavelet Symmlet de orden 2.

Una *wavelet* con mayor número de momentos de desvanecimiento es la *Coiflet*, cuya gráfica se muestra en las figura 9. Para cada orden diferente de la *wavelet* se tienen  $2N$  momentos de desvanecimiento. Puede ser simétrica o asimétrica dependiendo del orden  $N$  de la *wavelet* con que se trabaje. Los coeficientes de filtro pasabajas de descomposición de la *wavelet coif1* son  $\{c_{coif1}\} = \{-0.0157, -0.0727, 0.3849, 0.8526, 0.3379, -0.0727\}$ . Para este caso la relación entre momentos de desvanecimiento y número de coeficientes se ha perdido.

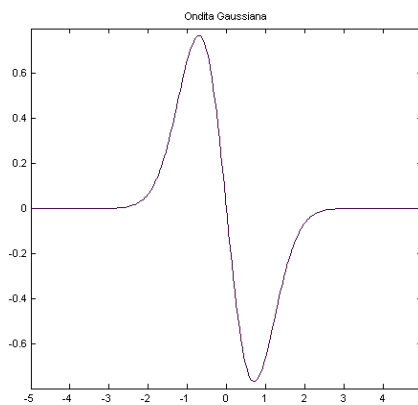


**Figura 9.** Wavelet Coiflet de orden 1.

La *wavelet Gaussiana* es otra muestra muy común de estas funciones finitas. Esta se define como la derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana. Matemáticamente esta definición se aprecia como:

$$gaus(x, n) = Cn \cdot \frac{d}{dx}(e^{-x^2}, n) \quad (12)$$

donde  $Cn$  es una constante determinada por  $2 - norm$  de  $gaus(x, n) = 1$ . Con esta *wavelet* sólo es posible realizar la Transformada Continua de *wavelets* y puede ser simétrica o asimétrica según el valor de  $n$ . La figura 10 muestra la *wavelet* Gaussiana de orden 1.

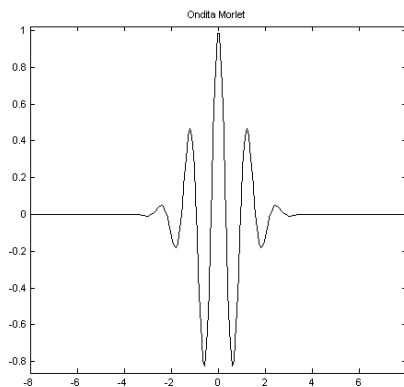


**Figura 10.** Wavelet Gaussiana de orden 1.

La última *wavelet* que mostraremos en este trabajo es la denominada *Morlet*, cuya expresión para definirla es la siguiente:

$$morl(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \cos(5x) \quad (13)$$

En la figura 11 podemos ver que la *wavelet Morlet* es simétrica. Por otro lado debemos comentar que no posee características de ortogonalidad ni biortogonalidad, además de que sólo es útil para realizar la Transformada Continua de *wavelets*. Existen muchas otras *wavelets* en la literatura entre ellas podemos encontrar la *Meyer*, *Spline* y *Biorthogonal*, para mayores detalles se puede consultar [JAL00], [KOB99], [MAT00] y [TRE00].



**Figura 11.** Wavelet Morlet.

Como podemos ver existen una gran variedad de *wavelets* que se han desarrollado a lo largo de 12 años, que es aproximadamente el tiempo que tiene de haber nacido este concepto y con él todos los análisis que más adelante se explicarán. Todas estas funciones comparten la característica de ser funciones finitas, propiedad que se aprovecha y que es manipulada mediante las variables de dilatación y traslación. Estos valores determinan que tan abierta o cerrada estará la señal y también nos dará información sobre el lugar donde se centrará la señal en el plano que se está utilizando. A continuación se presentarán los principales análisis que permiten hacer las *wavelets* sobre señales de interés. De esa forma se podrá apreciar mejor la manera en que son utilizadas y aprovechadas las características de estas funciones tan peculiares.

## 2.5 Transformadas de wavelets

Las Transformadas de *Wavelets* comprenden la Transformada Continua de *Wavelets* y la Transformada Discreta de *Wavelets*. Estas son las herramientas matemáticas que permiten el análisis de señales de manera muy similar que lo hacen las Transformadas de Fourier dando información en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Como menciona *Daubechies*:



"... the wavelet transform is a tool that cuts up data or functions or operators into different frequency components, and then studies each component with a resolution matched to its scale" [JAL00].

### 2.5.1 Transformada Continua de Wavelets

Ahora que conocemos las propiedades que tienen las *wavelets* y ya que sabemos sobre el tipo de análisis que se puede realizar utilizándolas, trabajaremos en definir formalmente lo que es la Transformada Continua de *Wavelets*.

Para hacer el análisis de una señal vamos a multiplicar cada punto de dicha señal por la *wavelet* que se haya elegido, cuyas características de escala y traslación serán permanentes para todo el proceso, después cada una de las muestras que se obtienen se van a sumar y de este modo tendremos la señal trasladada del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y el tiempo. Este proceso es el mismo que utiliza la Transformada de Periodo Corto de Fourier (STFT), sin embargo existen algunas diferencias en los resultados, Polikar las menciona en su tutorial:

*"The Fourier transforms of the windowed signals are not taken, and therefore single peak will be seen corresponding to a sinusoid, i.e., negative frequencies are not computed. The width of the window is changed as the transform is computed for every single spectral component, which is probably the most significant characteristic of the wavelet transform."* [POL96].

La Transformada Continua de *Wavelets* de una señal  $f(x)$  está definida por la siguiente ecuación:

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int h\left(\frac{x-b}{a}\right) f(x) dx; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (14)$$

donde  $a$  es la escala y  $b$  es la traslación, ambos números reales, y  $f(x)$  es la función a analizar. Por supuesto que si la escala es cero la *wavelet* no existirá y el análisis se indeterminará. La variable de escala  $a$  puede ser vista como  $a = \frac{f}{f_0}$  donde  $f_0$  denota la frecuencia central de la *wavelet*. De esta manera tendremos que la ecuación (14) se puede expresar también de la siguiente manera:

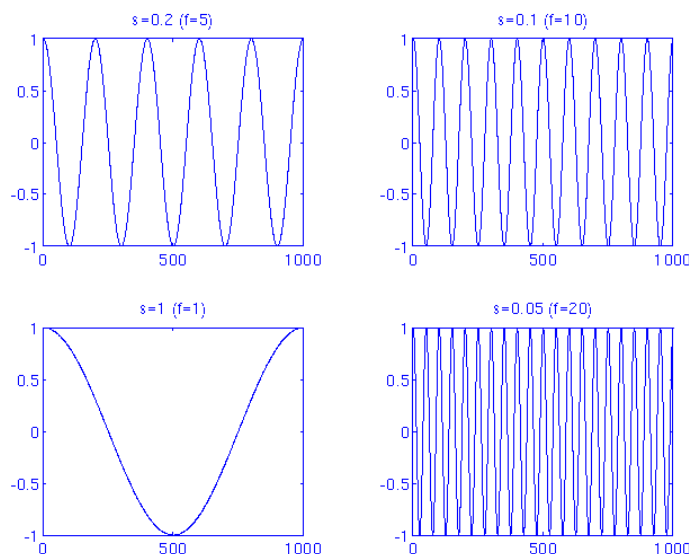
$$CWT(b, f) = \sqrt{\left|\frac{f}{f_0}\right|} \int h\left(\frac{f}{f_0}(x-b)\right) f(x) dx; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (15)$$

esta transformada permite la representación de la señal  $f(x)$  en el plano tiempo-escala.

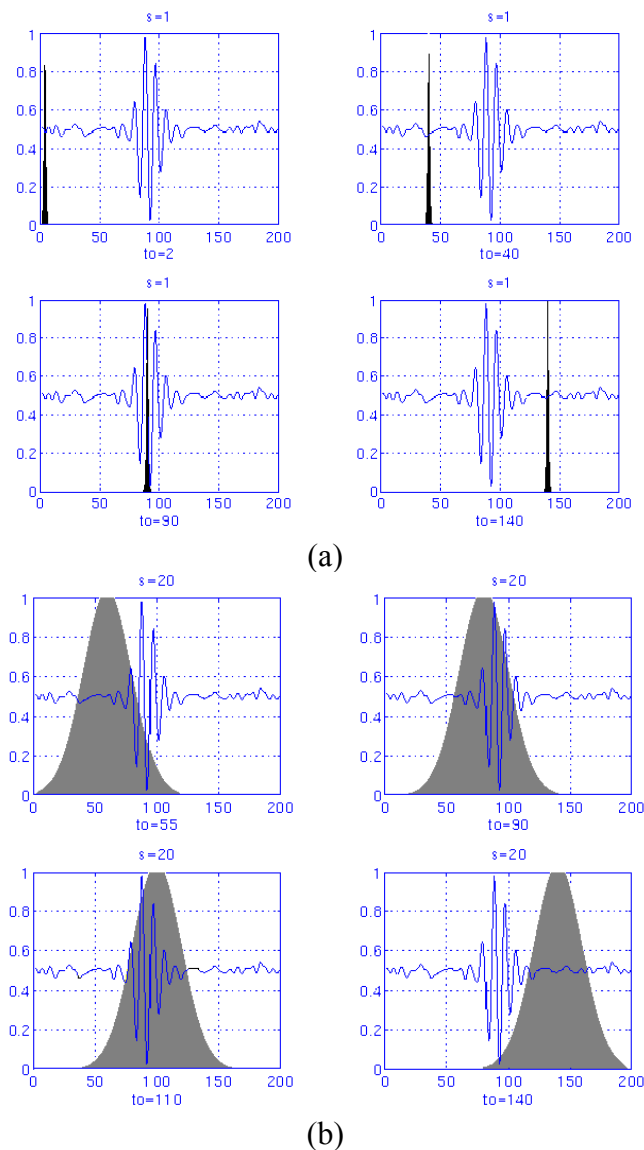
Lo siguiente es explicar como la CWT transforma la señal de un dominio a otro que depende de 2 variables. La variable de escala lleva en si la información de la dilatación y la contracción de la señal, pero podría verse desde otro punto de vista donde lo que cambia es la frecuencia y con ello al dilatarse la frecuencia se reduce y al contraerse la frecuencia aumenta. Aquí es justamente donde se aprovecha esta característica de las *wavelets* para obtener la información de la señal y conocer sus componentes de frecuencia.

En el dominio del tiempo el análisis es más sencillo ya que la variable de traslación tiene la información de tiempo, pues nos indica en que lugar del eje del tiempo se encuentra la *wavelet*. De este modo se van completando los datos en forma de una matriz, donde para cada integral que resolvamos tendremos un punto del plano traslación-escala, que es equivalente a tener la información en el plano tiempo-frecuencia.

En la figura 12 podemos ver el comportamiento de la variable de escala, mientras que en la figura 13 se muestra la variable de traslación. Obviamente para obtener una representación completa del plano traslación-escala (tiempo-frecuencia) debemos de realizar un barrido desde el inicio de la señal de interés hasta el final de la misma. Y también desde los niveles de escala que sean necesarios, porque como podemos apreciar puede ser que en algún momento nuestra *wavelet* no alcance a cubrir la totalidad de la señal de interés.



**Figura 12.** Variable de escala



**Figura 13.** Proceso de análisis en diferente escala y traslación.  
 (a) escala fija a 1 y traslación variante, (b) escala fija a 20 y traslación variante.

Ahora veremos un ejemplo de lo que es la Transformada Continua de Wavelets, Polikar en [POL96] nos sugiere una señal mostrada en la figura 14. Podemos ver que las componentes de frecuencia que tiene son de 30,20,10 y 5Hz. La transformada de la señal se muestra en la figura 15. Los ejes que se manejan son traslación y escala.

Es importante aclarar que el proceso de transformación de una señal es reversible, a esto es a lo que en la literatura se le conoce como la Transformada Inversa Continua de Wavelets (ICWT). Esta transformación inversa está dada por la siguiente ecuación:

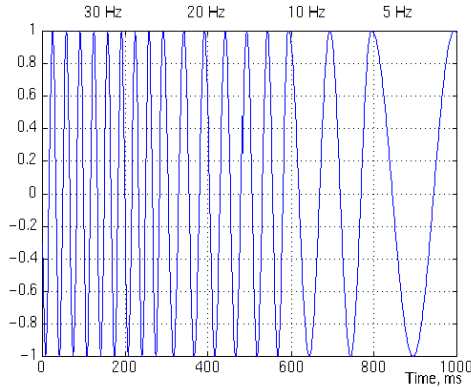


Figura 14. Señal senoidal

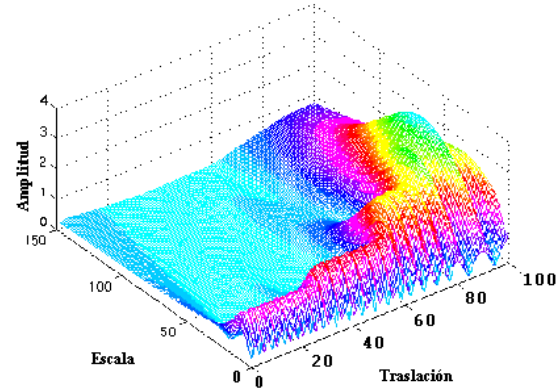


Figura 15. Transformada Continua de wavelets.

$$f(x) = \frac{1}{C_{\Psi}^2} \int \int \frac{CWT(a, b) h\left(\frac{x-b}{a}\right)}{a^2} db da \quad (16)$$

donde  $C_{\Psi}^2$  es una constante que se determina por la *wavelet* que se ha utilizado en la transformación. Esta constante se conoce como constante de admisibilidad y está definida como:

$$C_{\Psi} = \sqrt{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega} < \infty \quad (17)$$

donde  $H(\omega)$  es la Transformada de Fourier de  $h(x)$  que es la función madre de la *wavelet* utilizada en la transformación inicial. Básicamente la  $C_{\Psi}$  debe tener un valor finito para que se pueda hacer una transformación inversa y eso se va a dar en la gran mayoría de los casos [POL96]. A este proceso de reconstrucción de la señal se le conoce como síntesis de la señal y generalmente se realiza después del proceso de análisis o descomposición de esa misma señal. Esta herramienta matemática también puede ser tomada en cuenta para analizar señales que no son continuas. A continuación se presenta el mismo análisis pero para señales discretas.

## 2.5.2 Transformada Discreta de Wavelets

Para explicar como se realiza la transformación de una señal discreta partamos del hecho de que contamos con un par de escalas que cumplen con la condición  $a_0 < a_1$  que corresponden aproximadamente a dos frecuencias  $f_0 < f_1$ , una forma natural de discretizar los parámetros de tiempo y escala es submuestrear, de acuerdo a la regla de

Nyquist, los coeficientes en escala  $a_1$  en  $(\frac{f_0}{f_1})^{i-esima}$  a la razón de los coeficientes en la escala  $a_0$ . Para *wavelets* discretas los parámetros de escala y traslación son elegidos tal que en el nivel  $j$  la *wavelet*  $a_0^j h(a_0^{-j}x)$  es  $a_0^j$  veces el ancho de  $h(x)$ . Esto significa que el parámetro de escala es  $a = a_0^j : j \in \mathbb{Z}$  y el parámetro de traslación  $b = kb_0 a_0^j : j, k \in \mathbb{Z}$  [ALA03]. De este modo la familia de *wavelets* esta dada por:

$$h_{j,k}(x) = a_0^{-\frac{j}{2}} h(a_0^{-j}x - kb_0) \quad (18)$$

y de esta forma la Transformada Discreta de Wavelets tiene la forma:

$$d_{j,k} = a_0^{-\frac{j}{2}} \int f(x) h(a_0^{-j}x - kb_0) dx \quad (19)$$

Para recuperar  $f(x)$  de los coeficientes  $\{d_{j,k}\}$  debe existir la siguiente condición de estabilidad,

$$A \|f(x)\|^2 \leq \frac{2}{A+B} \sum_j \sum_k |d_{j,k}|^2 \leq B \|f(x)\|^2 \quad (20)$$

con  $A > 0$  y  $B < \infty$  para todas las señales  $f(x)$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces la fórmula de reconstrucción esta determinada por:

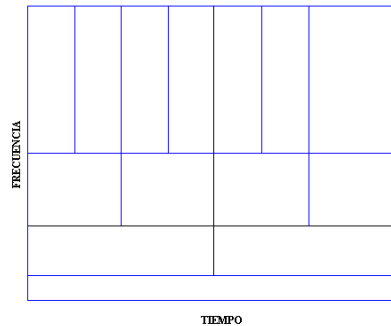
$$f(x) \approx \frac{2}{A+B} \sum_j \sum_k d_{j,k} h_{j,k}(x) \quad (21)$$

Entre más cercanos sean  $A$  y  $B$  más aproximada será la reconstrucción. Cuando  $A = B = 1$  la familia de *wavelets* es ortonormal [ALA03].

De lo anterior surge un concepto importante que es el Análisis de Multiresolución (MRA), que como lo dice el nombre es un análisis de la señal a estudiar de tal modo que cada componente de frecuencia es analizado con una resolución diferente. Esto es una alternativa más sobre la STFT que analiza todas las componentes de frecuencia a una misma resolución dada. En general, las ventajas que ofrece este método es que, con el uso de *wavelets*, a altas frecuencias se tiene una buena resolución en tiempo y poca resolución en frecuencia, mientras que para bajas frecuencias los resultados son buena resolución en frecuencia y poca resolución en tiempo [POL96].

La figura 16 nos muestra que los ejes que se manejan son tiempo y frecuencia, aquí se ejemplifica lo que se mencionó anteriormente. Cabe señalar que para la STFT las ventanas serían de igual dimensión para todos los casos ya que la función utilizada para

ese análisis no se dilata ni se contrae, lo que representa una ventaja de la WT sobre la STFT, ya que se puede tener mayor detalle del comportamiento de la señal, dada la resolución que puede alcanzar.



**Figura 16.** Plano tiempo-frecuencia analizado con la WT.

Para el caso de la transformación discreta debemos tomar en cuenta un muestreo que convierta la señal continua en discreta. El muestreo que se utiliza está basado en el Análisis de Multiresolución; entendiendo por resolución el número de niveles de descomposición en el dominio de las *wavelets*. Este muestreo, diferente a los que estamos acostumbrados a realizar cotidianamente, se realiza en base una serie de filtros pasa altas y filtros pasa bajas. Y de este modo se van obteniendo las muestras de bajas y altas frecuencias. Para esta labor se han diseñado un par de términos importantes que son el Decimado (Down sampling) y Undecimado (Up sampling) [BGG98] que propiamente se refieren al sentido en el que se realiza el muestreo. El decimado se refiere a incrementar en número de muestras, mientras que el undecimado se refiere a decrementar el número de las mismas.

Por filtro debemos entender un sistema que tiene una ecuación de diferencia  $y(n)$  y una respuesta al impulso  $h(n)$ , donde  $n = 2^J$  y  $J$  es un número entero que denota el número de niveles de descomposición. El valor de  $n$  indica el número de muestra que se está trabajando, todas las muestras están igualmente espaciadas. El proceso de filtrar una función  $x(n)$  corresponde a la operación matemática de la convolución que está definida de la siguiente manera [PRO88]:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n - m) \quad (22)$$

A partir de estos conceptos podemos explicar el proceso que se realiza para transformar una señal al dominio de tiempo y frecuencia. El proceso consiste en una serie

de filtrados repetitivos usando el concepto de decimado, es decir, al principio se utiliza un filtro pasa bajas y otro pasa altas con frecuencia de corte de la mitad de la máxima componente de frecuencia de la señal a analizar.

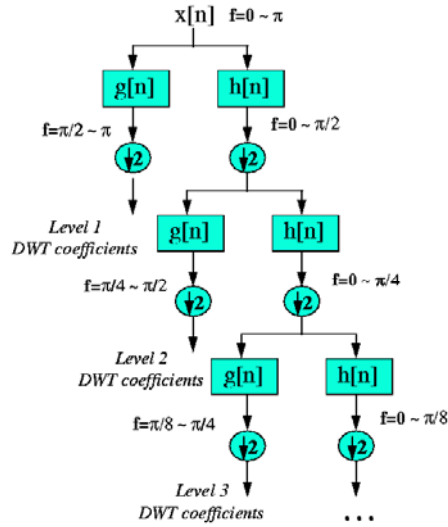
Posteriormente el resultado se vuelve a filtrar bajo las mismas características, la frecuencia de corte del segundo filtro es la mitad de la máxima componente de frecuencia de la señal que va a entrar a ese filtro, de este modo el proceso se repite y la salida de cada filtro va generando un par de muestras más a las que se tenían inicialmente. Este proceso se realiza de este modo ya que como se está trabajando con una señal discretizada no se podría realizar el mismo proceso que se hizo con la transformada continua. El siguiente paso es explicar cómo se obtiene la información de tiempo y frecuencia en este caso. Resulta que al filtrar la señal de ésta manera se van generando los siguientes resultados:

*"In summary, the lowpass filtering halves the resolution, but leaves the scale unchanged. The signal is then subsampled by 2 since half of the number of samples are redundant. This doubles the scale." [POL96].*

Gracias a eso se obtiene la información de la señal, tal y como se hizo con las señales continuas. Este proceso se puede explicar mejor viendo la figura 17. En ella podemos apreciar como ingresa la señal a analizar a un par de filtros, uno de ellos es pasa bajas y el otro es pasa altas, los cuales se identifican por la especificación de ancho de banda de la señal a la salida de cada uno, la cual va de la mitad del ancho de banda de la señal de entrada a uno de los extremos. Por ejemplo, tenemos que la señal que entra va de 0 a  $\pi$ . El filtro pasa altas es representado por  $g(n)$ , mientras que el pasa bajas es  $h(n)$ .

La salida de ambos filtros se vuelve a enviar a otro par de filtros de las mismas características. De éste modo se va reduciendo el ancho de banda de la señal y eso se traduce en la reducción a la mitad de la resolución. Lo que significa que a mayor número de etapas de filtrado se tendrá una mayor resolución.

La salida de los filtros pasa altas se van eliminando por la regla de Nyquist que dice que para poder reconstruir una señal a partir de sus muestras es necesarios muestrearla al menos con el doble de la frecuencia de esa señal, por lo que la información en la salida de los filtros pasa altas no es necesaria. Conforme se van agregando las etapas de filtrado se va aumentando el nivel  $J$  de descomposición de la señal.



**Figura 17.** Proceso de Transformación Discreta de Wavelets.

La explicación matemática de este proceso se basa en que los parámetros  $a$ ,  $b$  son muestreados sobre una rejilla conocida como *dyadic grid* en el plano tiempo-escala. Para ello tenemos que  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$  con lo que la ecuación (18) muestra una familia de *wavelets* ortonormales de la siguiente forma:

$$h_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} h(2^{-j}x - k) \tag{23}$$

y la ortonormalidad se define como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{j,k}(x) h_{j',k'}^*(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j' \text{ y } k = k' \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \tag{24}$$

A continuación se explica formalmente el Análisis de Multiresolución que se define como una secuencia de subespacios cerrados  $\{V_j \subset L^2(\mathbb{R}) : j \in \mathbb{Z}\}$  con las siguientes propiedades:

- (i)  $\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$ ;
- (ii)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ;
- (iii)  $\forall j \in \mathbb{Z}, x(n) \in V_j \Leftrightarrow x(2n) \in V_{j-1}$ ;
- (iv)  $\forall k \in \mathbb{Z}, x(n) \in V_0 \Rightarrow x(n - k) \in V_0$ ;
- (v) Existe una función  $\phi(n) \in V_0$  tal que  $\{\phi_{j,k}(n) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}n - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$



satisface la ecuación (20) y forma una base ortonormal de  $V_0$ .

"Property (i) denotes the successive subspaces that are used to represent the different resolutions or scales, while property (ii) guarantees the completeness of these subspaces and ensures that  $\lim_{j \rightarrow -\infty} x_j(n) = x(n)$ . Property (iii) denotes that  $V_{j-1}$  consists of all rescaled versions of  $V_j$ , while property (iv) means that any translated version of a function belongs to the same space as the original. Finally, in property (v), the function  $\phi(\cdot)$  is called the scaling function in the multiresolution analysis" [ALA03].

Como la idea del análisis de multiresolución es determinar una señal  $x(n)$  como un límite de aproximaciones sucesivas, las diferencias entre las dos aproximaciones sucesivas en la resolución  $2^{j-1}$  y  $2^j$  dan los *detalles* de la señal en la resolución  $2^j$ . En otras palabras, después de elegir una resolución inicial  $J$ , cualquier señal  $x(n) \in L^2(\mathbb{R})$  puede ser expresada como [ALA03]:

$$x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{J,k} \phi_{J,k}(n) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} h_{j,k}(n) \tag{25}$$

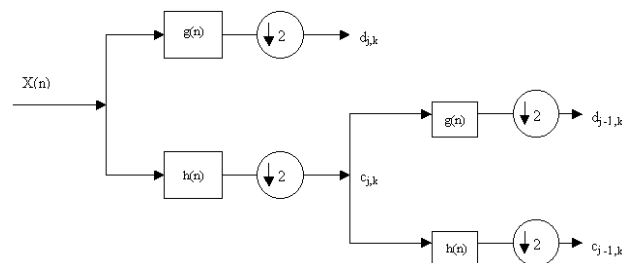
donde los *detalles* o coeficientes de *wavelets*  $\{d_{j,k}\}$  son definidos por:

$$d_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(n) h_{j,k}(2^{-j}n - k) dn \tag{26}$$

y las aproximaciones o coeficientes de escala  $\{c_{j,k}\}$  se expresan de la siguiente manera:

$$c_{j,k} = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(n) \phi_{j,k}(2^{-j}n - k) dn \tag{27}$$

de esta manera queda realizado el Análisis de Multiresolución en la señal  $x(n)$  expresandola en términos de los coeficientes de *wavelets* y en coeficientes de escala [ALA03]. Este proceso es el que se ha mostrado en la figura 17 y se reafirma con estos conceptos más formales en la figura 18. El simbolo  $\downarrow 2$  significa que se hace la operación de Decimado.



**Figura 18.** Análisis de Multiresolución de la señal  $x(n)$ .DWT.

La principal diferencia que existe entre este método y la Transformada de Fourier es que la información de la localización de las componentes de frecuencia a lo largo del tiempo no se pierde. Sin embargo la resolución de ese dato depende de el nivel en el que se encuentre. Los filtros se encuentran relacionados por la siguiente ecuación [POL96]:

$$g(L - 1 - n) = (-1)^n h(n) \tag{28}$$

Donde  $g(n)$  es el filtro pasa altas,  $h(n)$  es el pasa bajas y  $L$  es la longitud, en muestras, del filtro que se utilizará en la transformación. A los filtros que cumplen con ésta condición se les conoce como Filtros Espejo de Cuadratura (QMF). La salida de los filtros se puede expresar de la siguiente manera:

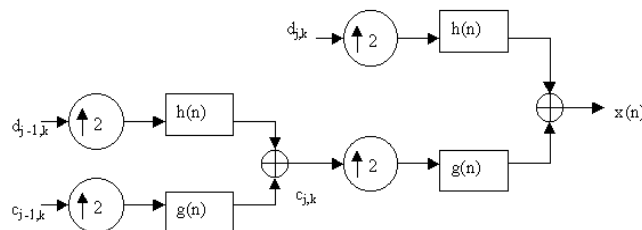
$$y_{high}(k) = \sum_n x(n)g(-n + 2k) \tag{29}$$

$$y_{low}(k) = \sum_n x(n)h(-n + 2k) \tag{30}$$

donde  $y_{high}(k)$  y  $y_{low}(k)$  son las salidas de los filtros pasa altas y pasa bajas respectivamente. De este modo y cumpliendo las características requeridas se puede analizar una señal continua que previamente se muestreó para hacerla discreta. Y por supuesto que el proceso es reversible mediante la Transformada Inversa Discreta de *Wavelets* de la ecuación (25) y donde haciendo algunos despejes se obtiene:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{high}(k)g(-n + 2k) + y_{low}(k)h(-n + 2k) \tag{31}$$

la cual se realiza por medio de las salidas de los filtros pasa altas y pasabajas multiplicada por su respuesta al impulso considerando el proceso de decimado y undecimado. Estos resultados son sumados desde la primer muestra hasta la última y ya con eso se ha reconstruido la señal discreta en el tiempo. Este proceso se muestra en la figura 19.



**Figura 19.** Análisis de Multiresolución de la señal  $x(n)$ .IDWT

## 2.6 Aplicaciones

Los procesos que se han mencionado anteriormente son las principales herramientas que se utilizan en el procesamiento y análisis de señales, pero quizás se esté preguntando para que se utilizan estas Transformaciones en la vida real. La respuesta a esta pregunta es lo que se explicará en ésta sección.

La Teoría de *Wavelets* tiene muchas aplicaciones reales que comprenden la detección de discontinuidades y puntos de ruptura en las señales, la identificación de frecuencias puras, la reducción de ruido en señales, la compresión de señales, aproximación de funciones, métodos espectrales para resolver ecuaciones diferenciales, análisis de fluidos turbulentos, entre otros [JAL00]. La que más nos interesa estudiar es, lógicamente, aquella aplicación con la que es posible reducir el ruido de las señales de interés. Sin embargo, mencionaremos brevemente cómo es que se consiguen algunas otras aplicaciones de las que se han mencionado anteriormente.

La que resulta muy fácil de entender a simple vista es la identificación de frecuencias puras, pues como hemos visto la Transformada de *wavelets* (en sus 2 versiones) nos permite conocer las frecuencias que tienen la señal analizada, de este modo y con un tratamiento de extracción de la información adecuado para evitar que ésta información se corrompa es muy fácil identificar estas frecuencias puras.

La siguiente es la detección de discontinuidades y puntos de ruptura en las señales, es posible utilizar las *wavelets* para estos propósitos pues sus procesos de análisis de multiresolución nos permite conocer en que momento se presentan los cambios de frecuencias en la señal analizada, de éste modo podemos detectar algún punto en el que la señal tenga un cambio que puede ser un punto de ruptura o una discontinuidad.

La compresión de señales es, quizás, la aplicación más famosa de la Teoría de *wavelets*, dado que el FBI (Federal Bureau of Investigation) la ha utilizado para guardar las imágenes de las huellas digitales en sus archivos[JAL00]. Esta aplicación es posible gracias a los coeficientes de *wavelet* que es información que sin ser la imagen misma posee los recursos suficientes, como hemos visto antes, para sintetizar la señal original, de este modo el total de información a guardar se reduce considerablemente, ya que no se

guarda la imagen como tal, sino los coeficientes de *wavelet* que en comparación son notablemente menos información.

Después continúan otro tipo de aplicaciones que son propiamente los objetivos de estas aplicaciones y donde no se usan directamente los métodos aquí estudiados, pero si cooperan con la obtención del resultado final. Entre estas se encuentran las mencionadas anteriormente, métodos espectrales para resolver ecuaciones diferenciales y análisis de fluidos turbulentos. Para mayor detalle se pueden consultar las siguientes fuentes [KOB99] y [BGG98]. Es importante aclarar que no son todas las aplicaciones que existen para las *wavelets*, esto es sólo una prueba muy pequeña de lo que se puede conseguir aplicando las Transformadas o las *Wavelets* por si solas. Tal y como lo marca la historia, el límite es nuestra imaginación.