Apéndice: Propagación de ondas electromagnéticas

Propagación de ondas electromagnéticas

En el estudio de la propagación de las ondas electromagnéticas, las leyes de Maxwell ocupan un lugar primordial para justificar dicha propagación. Partiendo de las leyes de Maxwell y dependiendo de las características del medio en el cual se encuentren las ondas (conductores, dieléctricos, espacio libre, etc.), se derivan diferentes leyes para describir su propagación. Las ecuaciones de Maxwell en su forma puntual son [38]:

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \qquad \text{Ecuación (A1)}$$

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} \qquad \text{Ecuación (A2)}$$

$$\nabla \bullet \mathrm{D} = \rho \qquad \text{Ecuación (A3)}$$

$$\nabla \bullet \mathrm{B} = 0 \qquad \text{Ecuación (A4)}$$

Ecuación de onda

La ecuación de onda es el punto de partida para la descripción de una onda electromagnética. Para el planteamiento de la ecuación de onda se asume un medio lineal isotrópico y homogéneo. Un medio es lineal si sus propiedades características son independientes de la magnitud o fuerza de los campos. Un medio es isotrópico si cumple que la densidad de campo eléctrico (D) es paralelo a la intensidad de campo eléctrico (E), la densidad de campo magnético (B) es paralelo a la intensidad de campo magnético (H) y la densidad de corriente (J) es paralela a la intensidad de campo eléctrico (E). Además un medio isotrópico presenta las mismas propiedades en todas las direcciones. Un medio es homogéneo si sus propiedades son las mismas en todos sus puntos. Para la ecuación de onda se asume que la carga libre neta en la región es cero (ρ = 0) y todas las corrientes presentes son de conducción (J = σE). Se analizan este tipo de regiones debido a que son muy generales e incluyen los principales medios de estudio: espacio libre (conductividad σ = 0) y la mayoría de conductores y dieléctricos [38]. La ecuación de onda o de Helmholtz se presenta en dos formas:

$$\nabla^2 \times \mathrm{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\delta^2 \mathrm{E}}{\delta t^2}$$ Ecuación (A5)

$$\nabla^2 \times \mathrm{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\delta^2 \mathrm{H}}{\delta t^2}$$ Ecuación (A6)

Donde μ es la permeabilidad magnética del medio y ε es la permitividad eléctrica del medio. Desde el punto de vista de una señal senoidal con variaciones estables de los vectores de campo, las ecuaciones 2.14 y 2.15 quedan expresadas en términos de los vectores de campo de forma fasorial como sigue [38]:

$$\nabla^2 \hat{E} = j\omega\mu\sigma \hat{E} + j^2\omega^2\mu\varepsilon \hat{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\hat{E}$$ Ecuación (A.7)

$$\nabla^2 \hat{H} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\hat{H}$$ Ecuación (A.8)

Por cuestiones de nomenclatura, se ha asignado γ^2 a la cantidad $j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$. Al ser un número complejo, se obtendrán dos raíces complejas, una positiva y una negativa. A la raíz positiva se le conoce como "la constante de propagación". La constante de propagación compuesta por una parte real y otra imaginaria tiene la forma:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \qquad \text{Ecuación (A.9)}$$

La parte real de la constante de propagación, α, recibe el nombre de "constante de atenuación" y la parte imaginaria, β, recibe el nombre de "constante de fase".

Onda plana uniforme

El concepto de onda plana uniforme (OPU) es muy importante cuando se analiza la propagación de las ondas debido a la gran similitud en forma existente entre éstas y las ondas propagadas por una antena en el campo lejano [4]. El término "plano" de una OPU se refiere a que tanto el campo eléctrico (E) como el magnético (H) residen solamente en un solo plano en todos sus puntos del espacio. El término "uniforme" de una OPU se refiere a que los fasores de campo vectorial en magnitud y fase son independientes de la posición en cada uno de sus planos [38].

Para las OPU, de forma convencional se asume que los campos solamente se encontrarán dentro del plano xy. El campo eléctrico (E) se encuentra en todo momento sobre el eje x y el campo magnético (H) se encuentra en todo momento sobre el eje y. El vector de Poyting entonces estará apuntando a la dirección de propagación en z lo que indica que el flujo de potencia será en dicha dirección. De lo anterior se puede apreciar que los campos se encuentran ortogonales entre sí y ortogonales a la dirección de propagación [38]. En la figura A.1 se muestran los ejes de propagación de una OPU.

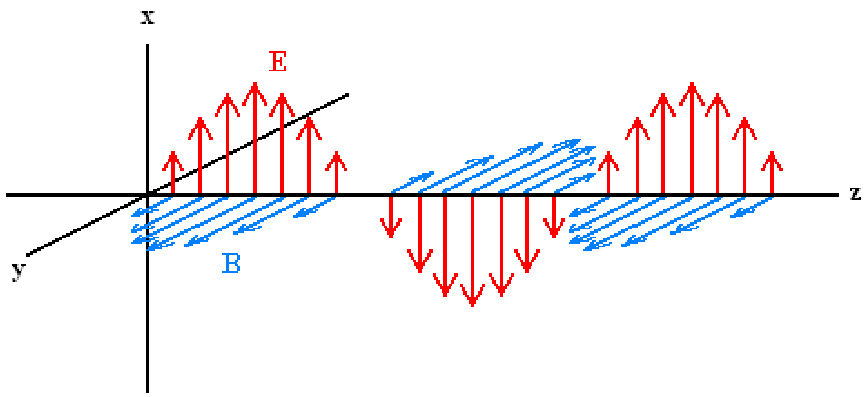

Figura A. 1 Plano de propagación de una OPU [39].

En resumen, se puede expresar la ecuación de una onda plana uniforme en propagándose mediante:

$$\hat{E}_x = E_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\theta +} + E_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta -} \qquad \text{Ecuación (A.10)}$$

$$\hat{H}_y = \frac{E_m^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\theta +} e^{-j\theta_{\eta} +} + \frac{E_m^-}{\eta} e^{\alpha} e^{j\beta z} e^{j\theta -} e^{-j\theta_{\eta}} \qquad \text{Ecuación (A.11)}$$

Donde la cantidad η tiene unidades de Ω y es conocida como la “impedancia intrínseca del medio” [38] y se obtiene $\hat{\eta} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$. En el caso del aire, la impedancia intrínseca se redondea a aproximadamente $\eta_0 = 120\pi$. Al tratarse de una cantidad compleja, la impedancia intrínseca del medio puede escribirse tanto en su forma rectangular como polar en las siguientes ecuaciones:

Y en el dominio del tiempo las ecuaciones anteriores se expresan como:

$$\mathsf{E}_x = \mathrm{Re}(\hat{E}_x\, e^{j\omega t})$$
$$= E_m^+ e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+\right) + E_m^- e^{\alpha z}\cos\left(\omega t + \beta z + \theta^-\right) \quad \text{Ecuación (A.12)}$$

$$\mathsf{H}_y = \mathrm{Re}(\hat{H}_y\, e^{j\omega t})$$
$$= \frac{E_m^+}{\eta} e^{-\alpha z}\cos\left(\omega t - \beta z + \theta^+ - \theta_\eta\right) - \frac{E_m^-}{\eta} e^{\alpha z}\cos\left(\omega t + \beta z + \theta^- - \theta_\eta\right) \quad \text{Ecuación (A.13)}$$

Como en este trabajo de tesis se trabaja con la propagación de las ondas electromagnéticas en el aire y en dieléctricos solamente se mencionan las fórmulas resumidas para dichos casos. Para que un material sea considerado buen dieléctrico debe cumplir la siguiente desigualdad:

$$\sigma << \omega\varepsilon \quad \text{Ecuación (A.14)}$$

Para estos casos los valores se pueden aproximar a [4]:

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{Ecuación (A.15)}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad \text{Ecuación (A.16)}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{Ecuación (A.17)}$$

En el caso del espacio libre las fórmulas 2.37, 2.38 y 2.39 se mantienen y el único cambio es en la constante de atenuación, la cual es α = 0.

Para mayor información acerca de la propagación de ondas, consultar [38].