CAPÍTULO 3:

LEYES FÍSICAS Y EL FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA RESPIRATORIO

En la sección anterior se analizó el funcionamiento pulmonar desde el punto de vista médico. En este capítulo se examina el comportamiento del flujo respiratorio, de acuerdo a leyes físicas y conforme a las características fisiológicas del sistema respiratorio. Dichas leyes específicamente constituyen la base del funcionamiento de un espirómetro de flujo, por lo que, se pondrá especial atención en las consideraciones para aplicarlas.

3.1 Introducción

Debido al complejo funcionamiento fisiológico del pulmón se trata de establecer concordancia con nuestro entendimiento y la situación real, por medio de leyes o dogmas físicas.

El aire, al igual que otros fluidos, se mueve de una región de mayor presión a otra de menor presión. El intercambio de gases en el organismo es posible por medio de una diferencia de presión existente en el interior del pulmón y una fuerza externa. En condiciones normales, la inspiración ocurre cuando la presión alveolar cae por debajo de la presión atmosférica (0cmH_2O). El movimiento del diafragma y de las paredes del pecho por los músculos intercostales produce la fuerza para lograr esa presión negativa, encontrando oposición al movimiento por la presencia de resistencia elástica de las paredes del pulmón y, por la fuerza de fricción ante el flujo del gas en el pulmón, tejido de la pared torácica y vías aéreas. El trabajo requerido para vencer la resistencia de fricción se pierde, pero el trabajo hecho para vencer la resistencia elástica de las paredes es almacenado, de forma similar a un resorte en la ley de Hooke, y utilizado en la espiración, permitiendo que esta última acción sea un movimiento regularmente pasivo.

El movimiento del aire al respirar ocasionado presenta principalmente dos tipos de flujo: laminar y turbulento.

3.2 Flujo Laminar y Turbulento en la Respiración

En el flujo laminar las partículas de los fluidos se mueven a lo largo de láminas adyacentes sin mezclarse. La agitación de las partículas del fluido es sólo de naturaleza molecular y están restringidas a moverse en trayectorias esencialmente paralelas, debido regularmente a la acción de la viscosidad. El estudio del flujo laminar es descrito por la ley de Poseuille.

En el flujo turbulento, las partículas de fluido no permanecen en capas, sino que se mueven en forma heterogénea a través del flujo, deslizándose más allá de otras partículas y chocando con algunas otras, produciendo un mezclado rápido y continuo del flujo. La medición de turbulencia es descrita por el número de Reynolds. Debido a que en la turbulencia el movimiento de las pequeñas masas de fluido es caótico, aún en pequeñas distancias, resulta matemáticamente irrealizable determinar el movimiento de las partículas individuales del fluido. Sin embargo, considerando el movimiento promedio de las agregaciones de partículas de fluido o por medio de métodos estadísticos, se puede obtener relaciones matemáticas.

El flujo transicional es una mezcla de los flujos laminar y turbulento que suele ocurrir en puntos de ramificación o próximos a obstrucciones parciales.

El flujo laminar en la respiración ocurre solamente en las vías más pequeñas, donde la velocidad lineal del flujo aéreo es extremadamente baja. La velocidad lineal (*cm/s*) es igual al flujo (cm^3/s) dividido entre el área de corte transversal. El flujo turbulento en la respiración y el transicional son ocasionados por flujos inspiratorios - espiratorios altos y variables, vías aéreas grandes, cambios de diámetro de los pulmones y vías respiratorias, ramificaciones y ángulos existentes en el sistema respiratorio [Levitzky, 1993].

3.3 Número de Reynolds

El número de Reynolds, descrito por Osborne Reynolds en 1883, es un número adimensional utilizado para caracterizar el movimiento de un fluido. Es el cociente resultante de comparar las fuerzas de inercia y los términos viscosos de las Ecuaciones de Navier- Stokes que gobiernan el movimiento de los fluidos. La fórmula que describe el número de Reynolds en un tubo es [Streeter, 1975]:

$$R_e = \frac{\rho V_s D}{\mu} = \frac{V_s D}{\nu} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Donde:

ρ es la densidad del flujo dada en kg/m^3

V_s es la velocidad característica del fluido, cuya unidad es m/s

μ es la viscosidad dinámica del fluido expresada en $\left(kg/m \cdot s\right) \times 10^{-5}$

D es el diámetro de la tubería a través de la cual circula el fluido escrita en m

ν es la viscosidad cinemática del fluido expresada en $\left(m^2/s\right)\times 10^{-5}$

Un flujo, por ejemplo, con un número de Reynolds alrededor de 100.000 (típico en el movimiento de una aeronave pequeña) expresa que las fuerzas viscosas son 100.000 veces menores que las fuerzas convectivas, y por lo tanto aquellas pueden ser ignoradas. Mientras que en un cojinete lubricado con un fluido y sometido a una cierta carga, el número de Reynolds es mucho menor que 1, indicando que ahora las fuerzas dominantes son las viscosas y por lo tanto las convectivas pueden despreciarse.

En la clasificación de flujos laminares y turbulentos, si el número de Reynolds es inferior de 2000 el flujo será laminar y si es mayor de 4000 el flujo será turbulento. Para un valor crítico de éste parámetro entre 2000 y 4000, existe una zona de incertidumbre y el comportamiento del fluido no puede ser modelado, considerándose como flujo transicional.

El índice de Reynolds puede verse afectado por varias condiciones incidentes como:

1. La quietud inicial del fluido
2. La forma de entrada del tubo.
3. La rugosidad del tubo.

3.4 Ley de Poseuille

La ley de Poiseuille, también llamada Hagen- Pouisuille (Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen y Jean Louis Marie Poisuille), es una ley física formulada en 1840 concerniente al volumen de flujos estacionarios laminares o líquidos viscosos uniformes e incompresibles que pasa a través de un tubo cilíndrico definida por [Streeter, 1975]::

$$\Phi = \frac{d\upsilon}{dt} = v\pi R^2 = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(-\frac{\Delta P}{\Delta x}\right) = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{|P_1 - P_2|}{L} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Donde:

Φ es el flujo expresado en m^3/s ,

υ es el volumen de un líquido transferido en el tiempo t expresado en m^3 ,

v es la mediana de la velocidad expresada en m/s ,

x el vector de dirección del flujo expresado en m ,

R el radio interno del tubo dado en m ,

ΔP la diferencia de presión entre las dos terminales expresada en pa ,

μ es la viscosidad dinámica del fluido escrito en $\left({}^{kg}\!/_{m \cdot s} \right) \times 10^{-5}$,

L la longitud del tubo escrita en m

3.4.1 Deducción de la Ley de Poseuille

La deducción de la Ley de Poiseuille se basa en el efecto de la viscosidad, la tercera Ley de Newton y la presión. Supongamos 2 capas de líquido en contacto, las cuales se mueven a diferente velocidad en dirección de *x*. La capa de arriba se mueve más rápido y es jalada en dirección negativa por la capa de abajo, mientras que, el líquido en la capa de abajo es jalado en dirección positiva por el líquido de arriba. La fuerza experimentada por cada capa es proporcional al área de contacto expresada por *A*, multiplicada por la diferencial de velocidad en dirección del flujo $\Delta v_x/\Delta y$, y por una constante de proporcionalidad μ. La fuerza que experimenta la capa superior obedece a la siguiente expresión:

$$F_{\mu,capa\,\mathrm{sup}} = -\mu \cdot A \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Donde el signo negativo indica que el líquido de abajo está ejerciendo una fuerza en contra del movimiento de la capa de arriba que tiene una mayor velocidad. Por la tercera Ley de Newton sabemos que la fuerza de la capa inferior es igual y opuesta a la fuerza del líquido superior. En esta ecuación asumimos que el área de contacto es lo suficientemente extensa como para ignorar los efectos de las esquinas, es decir, su comportamiento es el de un fluido Newtoniano.

Flujo de Líquido a través de un tubo.

En un tubo se hace la siguiente suposición:

> El líquido en el centro se mueva más rápido mientras que el líquido que toca las paredes es cuasi- estacionario debido a la fricción.

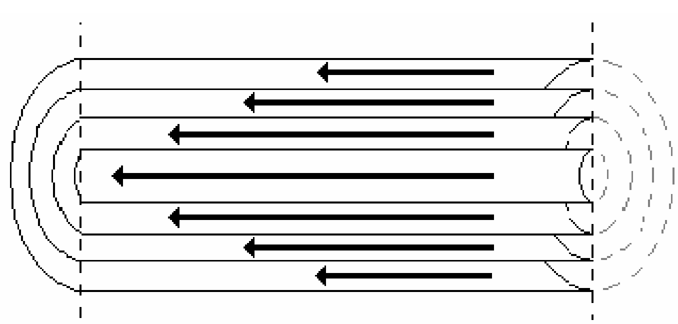

Figura 3.1: vectores de velocidad de un flujo laminar

Un corte del hipotético tubo, como el de la figura 3.1, muestra las diferentes láminas moviéndose a diferentes velocidades. Para simplificar el análisis, se asume que el líquido está formado por capas o láminas circulares, cada una con su propia velocidad, la cual está determinada únicamente por su distancia radial al centro del tubo.

Para describir el movimiento del líquido, se necesita conocer todas las fuerzas actuando sobre cada lámina:

1. La fuerza empujando al líquido a través del tubo. Esta fuerza es debida al cambio de presión multiplicado por el área: $F = -\Delta P \cdot A$ en la dirección del movimiento del líquido; el signo negativo viene de la forma en la que se define el cambio de presión: $\Delta P = P_{final} - P_{inicial} < 0$
2. La fuerza que ejerce la lámina vecina más cercana al centro del tubo, y que se mueve a una velocidad mayor.
3. La fuerza que ejerce la lámina vecina exterior, y que se mueve a una velocidad menor.

La primera de estas fuerzas, viene de la definición de presión. Las otras dos fuerzas, requieren que las ecuaciones se modifiquen de tal modo que se incluya el efecto de la viscosidad.

Para la lámina más rápida, es decir, la del centro del tubo, se asumirá un radio s y un grosor ds. Se calculará la fuerza ejercida sobre una lámina de radio s también. De la ecuación 3.3, se necesita conocer el área de contacto y el gradiente de velocidad. El área de contacto entre la lámina más rápida y la lámina a considerar es $A = 2\pi s \Delta x$. No se conoce la forma exacta de la velocidad del líquido dentro del tubo, pero se sabe que es dependiente del radio. Por lo tanto, el gradiente de velocidad es el cambio de velocidad con respecto al cambio de distancia radial en la intersección de las dos láminas. Esta intersección se encuentra en el radio *s*. Por lo tanto, considerando que la velocidad es positiva con respecto al movimiento del líquido (aunque la derivada de la velocidad es negativa), la forma final de la ecuación es:

$$F_{vis\cos idad,\, rapido} = -\mu 2\pi s \Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s} \qquad \textbf{(3.4)}$$

En donde la derivada debe evaluarse en el radio *s*.

Para deducir la fuerza de la lámina de velocidad menor, se requiere calcular los mismos valores que para el caso de la lámina de mayor velocidad. En este caso, para el área de contacto, se debe considerar el radio como s+*ds* en lugar de *s*. De igual modo, se debe considerar que esta fuerza se opone al movimiento del líquido, por lo que es negativa, al igual que la derivada de la velocidad, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$F_{vis\cos idad,\, lento} = \mu 2\pi (s + ds) \Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s+ds} \qquad \textbf{(3.5)}$$

La solución para el flujo de un líquido a través de un tubo asume una última consideración: No hay aceleración del líquido en el tubo, y por la primera ley de Newton, no hay fuerza neta. Si no hay fuerza neta, entonces se pueden sumar todas las fuerzas e igualarlas a cero:

$$0 = F_{presion} + F_{vis\cos idad,\, rápido} + F_{vis\cos idad,\, lento} \qquad \textbf{(3.6.1)}$$

ó

$$0 = -\Delta P 2\pi s ds - \mu 2\pi s \Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s} + \mu 2\pi (s + ds) \Delta x \left.\frac{dv}{dr}\right|_{s+ds} \quad \textbf{(3.6.2)}$$

Antes de continuar, se requiere simplificar esta ecuación, por lo que se conserva únicamente el término lineal y el cuadrático. Se utilizará una expansión en serie de Taylor:

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r+dr} = \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r} + \left.\frac{d^2 v}{dr^2}\right|_{r} dr$$

Aplicando esta relación en la ecuación, agrupando términos y empleando la variable *r* en lugar de *s* (dado que la lámina que se eligió es arbitraria, y se requiere que la expresión sea válida para toda la lámina), tenemos que:

$$0 = -\Delta P 2\pi r dr + \mu 2\pi dr \Delta x \frac{dv}{dr} + \mu 2\pi dr \Delta x \frac{d^2 v}{dr^2} + \mu 2\pi (dr)^2 \Delta x \frac{d^2 v}{dr^2} \quad \textbf{(3.7)}$$

El término $(dr)^2$ del último término de la ecuación será demasiado pequeño y será despreciado de la ecuación. Finalmente, la ecuación 3.7 se reescribe en la forma de una ecuación diferencial, de modo que sea fácil de resolver quedando de la forma:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \quad \textbf{(3.8)}$$

Se puede esperar que ambos lados de la ecuación sean negativos dado que hay una caída de presión en el tubo (lado izquierdo) y, tanto la primera como la segunda derivada de la velocidad son negativas (la velocidad tiene un valor máximo en el centro del tubo). Este tipo de ecuaciones diferenciales tienen soluciones de la forma $v = A + Br^2$. Para resolverla, se sustituye esta solución dentro de la ecuación, y se resuelve para A y B.

$$\frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x} = 2B + \frac{1}{r}2Br = 4B$$

Esto significa que:

$$B = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}$$

Para resolver *A*, se asume que en la pared del tubo (r=R), la velocidad es 0.

$$v = 0 = A + \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}R^2$$

ó

$$A = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}R^2$$

Ahora se tiene una formula para la velocidad del líquido moviéndose a través del tubo como una función de la distancia al centro del tubo:

$$v = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}\left(R^2 - r^2\right) \qquad \textbf{(3.9)}$$

O en el centro del tubo donde el líquido se mueve más rápido (r=0), en donde R es el radio del tubo,

$$v_{\max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{\Delta x}R^2 \qquad \textbf{(3.10)}$$

Integración para la Ley de Poseuille

Para obtener el volumen total que circula a través del tubo, se requiere de sumar las contribuciones de cada lámina. Para calcular el flujo a través de cada lámina, se multiplica la velocidad (ecuación 3.10) por el área de la lámina:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{|\Delta P|}{\Delta x}\left(R^2 - r^2\right)2\pi r dr = \frac{1}{2\mu}\frac{|\Delta P|}{\Delta x}\left(rR^2 - r^3\right)dr \qquad \textbf{(3.11)}$$

Finalmente, se integra esta ecuación sobre toda la lámina, a través del radio (variable *r*) para obtener la fórmula expresada en la ecuación 3.2, conocida como la Ley de Hagen- Poseuille [Streeter, 1975]::

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\mu}\frac{|\Delta P|}{\Delta x}\int_0^R \left(rR^2 - r^3\right)dr = \frac{|\Delta P|\pi R^4}{8\mu\Delta x}$$

3.5 Resumen del Capítulo

Se presentó dos fundamentos básicos que describen el movimiento del flujo de acuerdo a sus características viscosas, su rapidez de deformación y estabilidad. Estas leyes son aplicables para describir tanto el flujo aéreo pulmonar, como el flujo corriente en el espirómetro. El conocimiento de estos conceptos de la mecánica de fluidos es indispensable para comprender el procedimiento a seguir en la construcción del neumotacógrafo, que es el sensor utilizado en la construcción de los espirómetros de flujo, tratados en el siguiente capítulo.