



## CAPÍTULO VI. CINÉTICA DE LA DIGESTIÓN ANAEROBIA

### 6.1. *Introducción*

En capítulos anteriores se han estudiado los distintos microorganismos presentes en la digestión anaerobia sus interacciones y sus respectivos metabolismos. También se han estudiado las características medio ambientales que necesitan para desarrollarse óptimamente y los compuestos que pueden resultar tóxicos o inhibitorios para su metabolismo, sin embargo junto con el proceso microbiológico es necesario conocer y entender la forma de crecimiento de los microorganismos la química básica que se relaciona con el proceso de digestión y las herramientas que existen para predecir o modelar este crecimiento. Todos los organismos crecen gracias a la transformación de sustratos orgánicos e inorgánicos. Mediante reacciones de óxido/reducción logran obtener la energía potencial almacenada en los enlaces y esta se distribuye en la célula, ya sea que esta energía se canalice a crecimiento o a reproducción es posible trazar rutas metabólicas (estequiométricas y mediante balances de materia) que nos permitan entender mejor el comportamiento microbiano y por tanto generar condiciones que favorezcan su crecimiento a fin de optimizar su desempeño.

Es importante dentro del diseño de cualquier proceso biológico conocer la tasa o la velocidad a la que son empleados ciertos materiales dentro del reactor, en el caso de la digestión anaerobia, el planteamiento de estas tasas nos permitirá conocer con anterioridad la producción de metano a partir de un cierto tipo de material, el crecimiento bacteriano o la remoción de ciertos compuestos.

Suponiendo que las condiciones ambientales estén bien controladas se puede asegurar una estabilización apropiada mediante el control de la tasa de crecimiento. Esta tasa esta en función de la velocidad a la cual los microorganismos metabolizan o utilizan el



sustrato, y de ella dependerá el tiempo que deben permanecer los microorganismos dentro del proceso.

La solución de un modelo se puede utilizar para diseñar un nuevo proceso capaz de cumplir los objetivos de tratamiento, o bien, para analizar porqué un proceso que ya funciona cumple o incumple su objetivo.

Este capítulo está dedicado a revisar el crecimiento microbiano y los modelos cinéticos empleados para predecir el comportamiento de los microorganismos a determinadas condiciones de proceso.

## 6.2. *Crecimiento microbiano*

Las bacterias son las responsables de las reacciones de biodegradación en la digestión anaerobia. Cada célula individual se reproduce por un proceso llamado fisión binaria, el tiempo que requiere cada ciclo de crecimiento es muy variable y depende de factores nutricionales y genéticos. El crecimiento se define como “un incremento en el número de células microbianas en una población, lo cual también puede ser medido como un incremento en la masa microbiana” (Brock, 1998). En una forma general se puede describir el crecimiento microbiano a través de 4 etapas. La primera etapa recibe el nombre de *fase de latencia*, que corresponde al lapso en el que las bacterias se adaptan a nuevas condiciones medio ambientales, este periodo puede ser corto o largo, todo depende de la velocidad a la que las bacterias sintetizan enzimas que permitan metabolizar determinados componentes esenciales presentes en el medio (ver Fig. 5.1). En esta fase no hay reproducción celular por lo que la velocidad de crecimiento es nula. También se presenta fase de latencia en aquellas poblaciones que han sufrido daños debido a excesivas temperaturas, compuestos tóxicos, variaciones de pH, etc.

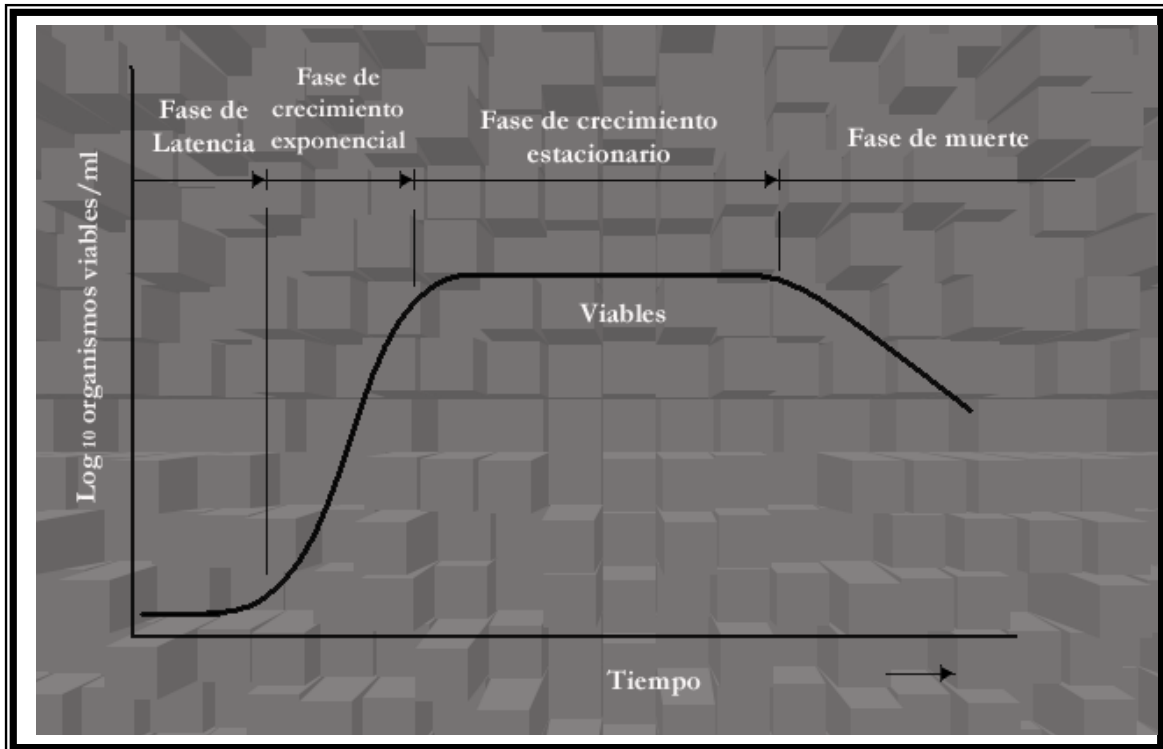


Fig.5.1 Curva de crecimiento típica para una población microbiana

Una vez que las bacterias se han adaptado a las nuevas condiciones del medio, se presenta una *fase de crecimiento exponencial* en donde cada célula se dividirá en dos, al principio la velocidad de crecimiento celular será lenta para después incrementarse hasta llegar a su valor máximo y permanecer constante por un tiempo determinado.

El tiempo necesario para que a partir de una célula se formen dos, recibe el nombre de tiempo de generación, también se le conoce como tiempo de duplicación y puede obtenerse mediante la relación directa que existe entre el número de células presentes al inicio y al final de cierto lapso como se describe en la siguiente expresión:

$$N = N_0 2^n$$



De acuerdo a la expresión anterior  $n$  equivale a:

$$n = \frac{\log N - \log N_0}{\log 2}$$

Donde  $N$  = número final de células,  $N_0$  = número inicial de células y  $n$  = número de generaciones. El tiempo de generación  $g$  es igual a  $t/n$  donde  $t$  son las horas o minutos de crecimiento exponencial. Cabe señalar que el tiempo de generación es diferente para cada especie y como ya se ha mencionado antes depende de diversos factores.

En un cultivo en el que no se agrega más sustrato o medio, no puede existir un crecimiento exponencial indefinido, tarde o temprano un nutriente esencial se terminará empobreciendo el medio o algún producto resultante del metabolismo microbiano se acumulará y alcanzará concentraciones tóxicas o inhibitorias lo que frenará el crecimiento exponencial. Cuando esto sucede se dice que se ha alcanzado la fase estacionaria, en ella no hay aumento ni decremento del número de células presentes, ya que la velocidad de crecimiento se vuelve lenta y algunas células empiezan a morir lográndose un equilibrio, a pesar de que no hay crecimiento neto en esta fase la mayoría de las funciones celulares continúan.

Si las condiciones del medio no cambian una vez alcanzada la fase estacionaria eventualmente las células morirán, la fase de muerte es la última etapa del crecimiento microbiano. En algunos casos va acompañada de lisis celular y al igual que la fase de crecimiento presenta un comportamiento exponencial, sin embargo la velocidad de muerte resulta ser más lenta que la de crecimiento.

En los procesos continuos, se pretende que la fase de crecimiento estacionario se mantenga indefinidamente.



### 6.3. *Objetivos del crecimiento microbiano*

Aunque la mayoría de las reacciones de degradación forman parte del metabolismo normal de las células bacterianas, el objetivo del metabolismo microbiano no es la eliminación de los contaminantes ambientales, el objetivo principal es crecer y mantenerse. Mediante los nutrientes, la energía y los electrones disponibles en el medio ambiente es que las bacterias logran crecer y alimentarse, los nutrientes principales son C, N, P, S y otros elementos que conforman la base de los carbohidratos, aminoácidos, lípidos y ácidos nucleicos. Los electrones son necesarios para reducir los nutrientes a la forma química utilizada en los constituyentes celulares, y para generar la energía necesaria para la síntesis y el mantenimiento de la biomasa.

“El metabolismo microbiano se basa en la transferencia de electrones de un sustrato donador a uno aceptor. El sustrato donante se oxida y emite electrones que son llevados por un cosustrato interno reducido. Una parte de los electrones transportados por el cosustrato llegan al sustrato aceptor, esta transferencia generará energía en forma de un compuesto de almacenamiento, el adenosintrifosfato (ATP). El resto de los electrones y parte del ATP se emplean para generar biomasa nueva, mientras que el ATP restante satisface las necesidades de mantenimiento de las células.” (Rittmann y Sáez, 1993). (Ver fig. 5.2)

Debido a que la transferencia de electrones entre los sustratos es esencial para la producción y la conservación de la biomasa reciben el nombre de sustratos primarios. Normalmente el sustrato donante de electrones primario es uno de varios compuestos orgánicos posibles, mientras que el sustrato aceptor de electrones primario normalmente es  $O_2$ ,  $NO_3^-$ ,  $CO_2$ ,  $SO_4^-$  o un compuesto orgánico como en el caso de la digestión anaerobia que es el  $CH_4$ .

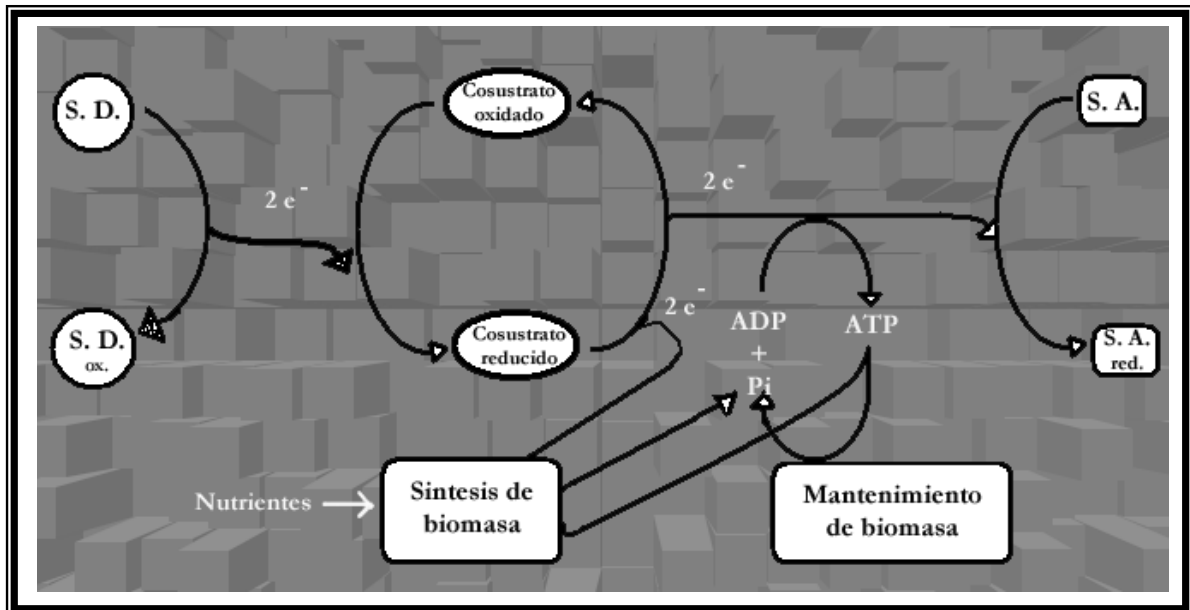


Fig. 5.2 Flujos de electrones y de energía típicos en una célula bacteriana.

S.D.= sustrato primario donante, S.D.ox.= sustrato donante oxidado, S.A.= sustrato aceptor primario, S.A. red.= sustrato aceptor reducido, ADP = adenosina difosfato y Pi = fosfato inorgánico,  $e^-$ =electrón

Existen también sustratos secundarios, reciben este nombre porque no aportan un flujo de electrones suficientemente grande para mantener la síntesis de nueva biomasa y la subsistencia de la célula, esto se debe a que no se encuentran en altas concentraciones por lo tanto su flujo de electrones es menor al flujo mínimo requerido. Aún así pueden degradarse si actúan como sustratos secundarios, tal es el caso de los contaminantes orgánicos como los fenoles (ver tabla 4.4).

#### 6.4. Estequiometría de la metanogénesis

La estequiometría consiste en plantear ecuaciones químicas balanceadas que representen cuantitativamente las relaciones que existen entre los reactivos y los productos, en este caso la relación que existe entre los sustratos, la biomasa y los productos finales. Mediante el planteamiento de estas relaciones sabremos cuantos gramos de células y productos finales tendremos por cada mol o gramo de residuos suministrados al proceso ya que los balances de materia para el carbono, el hidrógeno, el nitrógeno, el oxígeno y otros elementos se mantienen a cada paso. En el caso de la digestión anaerobia el balance de los electrones equivalentes que entran al proceso con la materia orgánica es mucho más



importante, ya que todos estos electrones se conservan en el  $\text{CH}_4$ , esto quiere decir que sólo a través de la formación de metano los electrones equivalentes se removerán y el residuo se estabilizará.

El primero de cuatro pasos que se tienen que seguir para conformar un análisis estequiométrico es la construcción de una fórmula que contenga las proporciones másicas de C, H, O y N del residuo a tratar, un análisis similar se debe llevar a cabo para obtener una fórmula empírica que nos represente las células microbianas, esto constituye el segundo paso. El tercer y cuarto paso están relacionados con la forma en la que el sustrato donador de electrones se divide entre la generación de energía y la síntesis. A continuación se plantea la estequiometría de la digestión anaerobia tomando en cuenta los criterios arriba mencionados.

#### 6.4.1. Fórmula empírica para células microbianas

Una de las primeras fórmulas empleadas para representar células microbianas fue  $\text{C}_5\text{H}_7\text{O}_2\text{N}$ , presentada por Porges, Jasewicz y Hoover en 1956 durante un estudio de tratamiento biológico de aguas residuales que contenían caseína. Actualmente se sabe que las proporciones másicas de cada elemento varían de microorganismo a microorganismo, del tipo de sustrato del que se este obteniendo energía, de los nutrientes presentes en el medio y si se trata de una cepa pura o de un consorcio bacteriano. Un análisis químico del porcentaje en peso de cada uno de los elementos presentes en la porción orgánica de una muestra de células bacterianas nos dará una idea de su composición.

La tabla 5.1 muestra diferentes fórmulas empíricas para el proceso de metanogénesis a partir de distintos sustratos.



Tabla 5.1 Fórmulas empíricas para células bacterianas metanogénicas

Fórmula Empírica	Peso Formular	COD' Peso	% N	Sustrato
<i>Cultivo mixto</i>				
C <sub>4.9</sub> H <sub>9.4</sub> O <sub>2.9</sub> N	129	1.26	11	acetato
C <sub>4.7</sub> H <sub>7.7</sub> O <sub>2.1</sub> N	112	1.38	13	octanoato
C <sub>4.9</sub> H <sub>9</sub> O <sub>3</sub> N	130	1.21	11	glicina
C <sub>5</sub> H <sub>8.8</sub> O <sub>3.2</sub> N	134	1.16	10	leucina
C <sub>4.1</sub> H <sub>6.8</sub> O <sub>2.2</sub> N	105	1.2	13	caldo nutritivo
C <sub>5.1</sub> H <sub>8.5</sub> O <sub>2.5</sub> N	124	1.35	11	glucosa
C <sub>5.3</sub> H <sub>9.1</sub> O <sub>2.5</sub> N	127	1.41	11	almidón

Fuente: Adaptación Rittmann y McCarty 2001

#### 6.4.2. División del sustrato y Rendimiento celular

Como ya se ha mencionado durante la síntesis y el crecimiento celular el flujo de electrones es crucial para obtener energía suficiente para todas las funciones celulares. Inicialmente una porción de electrones ( $f_e^0$ ) del sustrato donador es transferida al aceptor para la conversión de otra porción de electrones ( $f_s^0$ ) en células microbianas. Ver Fig. 5.3.

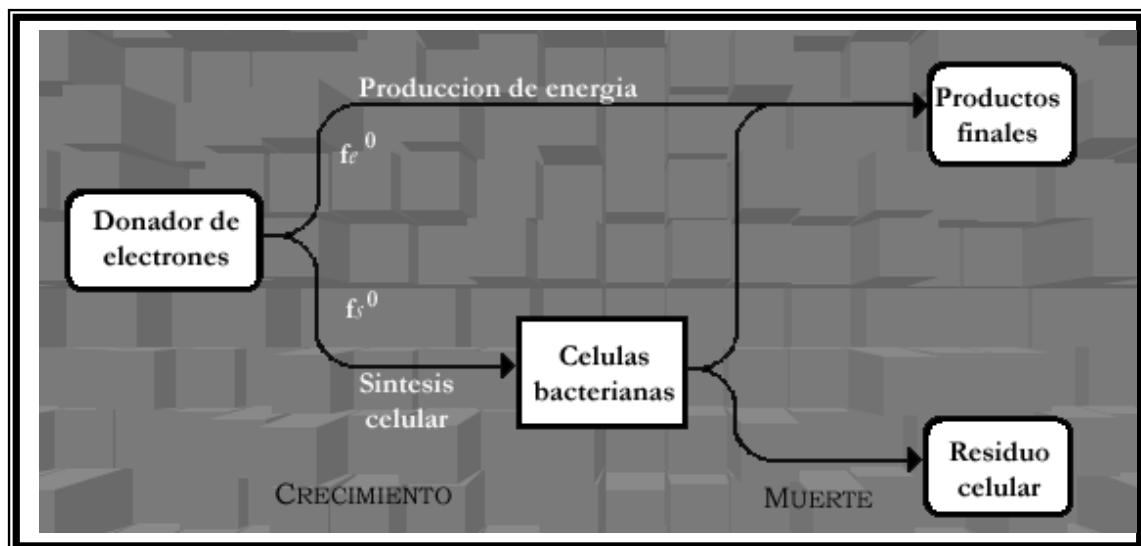


Fig. 5.3 Utilización del donador de electrones para síntesis y producción de energía

La suma de  $f_e^0$  y  $f_s^0$  es igual a 1. Cuando por depredación o por causas naturales la célula muere, parte de los electrones en  $f_s^0$  son transferidos al aceptor para generar más





energía y otra parte se convierte en residuos celulares orgánicos. Las porciones inicialmente convertidas en células,  $fs^0$ , y usadas para generar energía,  $fe^0$ , proveen las bases para dividir el sustrato entre generación de energía y síntesis.

La división de la energía que proveniente del sustrato también se maneja en términos de flujo de electrones equivalentes, ya que son estos flujos los que generan la energía de la célula, estos equivalentes vienen contenidos junto con la materia orgánica que entra al proceso.

La fracción  $fs^0$  puede ser convertida a unidades de masa como gramos de células producidas/ gramos de DQO consumido. Cuando se expresa en gramos se denomina rendimiento total y se representa con la letra Y:

$$Y = fs^0 (M_c \text{ g células} / \text{mol células}) / [(n_e e^- \text{ eq} / \text{mol células}) (8 \text{ g DQO} / e^- \text{ eq donador})]$$

Donde  $M_c$  = fórmula empírica de las células,  $n_e$  es el número de electrones equivalentes en un mol de células empíricas, y la masa del donador debe expresarse como DQO.

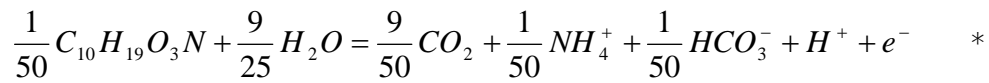
### 6.4.3. Producción de Energía

El sustrato de la mayoría de las reacciones es la materia orgánica, es decir, el donador de electrones, en condiciones anaerobias los aceptores más comunes son nitratos, sulfatos y dióxido de carbono. En algunos casos la materia orgánica es usada como aceptor y donador a ese proceso se le denomina fermentación.

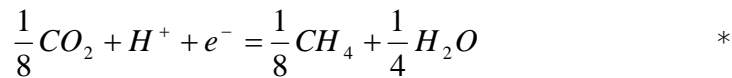
Para conocer la energía que se obtiene de la oxidación de la materia orgánica y de la reducción de los productos finales es necesario construir una reacción estequiométrica que involucre los sustratos, los productos y la energía libre que se produce durante la conversión de uno a otro.



En el caso de la metanogénesis la reacción para la generación de energía ( $R_e$ ) se determina escribiendo primero la reacción de oxidación (donador de electrones,  $R_d$ ):



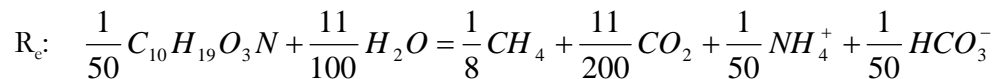
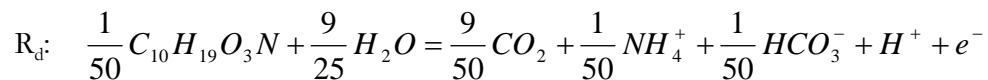
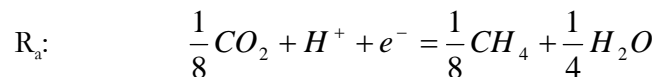
y posteriormente la reacción de reducción (aceptor de electrones,  $R_a$ ):



Se hace una resta algebraica y se obtienen los coeficientes de cada una de las especies involucradas.

$$R_e = R_a - R_d$$

Esto es:



(\*Las reacciones de oxidación y reducción fueron tomadas de Rittmann y McCarty 2001, donde  $C_{10}H_{19}O_3N$  corresponde a la fórmula obtenida para lodos residuales municipales).

Con esta última reacción obtenida podemos aseverar que cuando 1/50 mol (ó 4 grs.) de lodos residuales son convertidos en energía durante la digestión anaerobia, 1/8 de mol (ó 16 grs.) de metano se forman y 11/200 de dióxido de carbono ascienden hacia la fase gaseosa. Una relación muy importante que observamos en la ecuación es aquella que existe entre los moles de  $NH_4^+$  y  $HCO_3^-$  que como hemos visto son los responsables del valor de pH dentro del proceso de digestión.



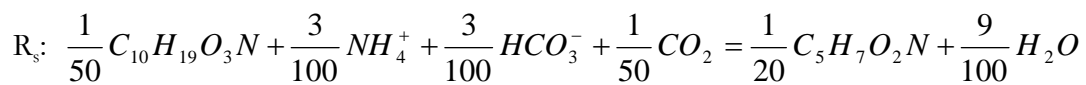
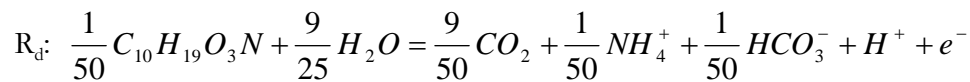
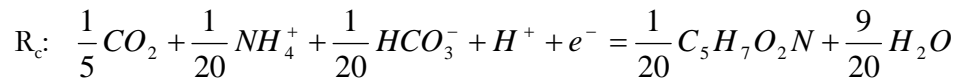
#### 6.4.4. Síntesis celular

Como ya se ha mencionado anteriormente el crecimiento biológico dependerá de la división del sustrato en producción de energía y en síntesis celular.

Para representar la síntesis celular ( $R_c$ ) es necesario escribir nuevamente una reacción que relacione el sustrato donador de electrones ( $R_d$ ) y la formación de células nuevas ( $R_c$ ).

$$R_s = R_c - R_d$$

Esto es:



#### 6.4.5. Reacción general del crecimiento biológico

Para obtener una reacción general que describa el crecimiento microbiano debemos relacionar la producción de energía y la síntesis celular.

$R_c$  deberá ser multiplicada por  $f_c$  y  $R_s$  deberá ser multiplicada por  $f_s$ .

$$R = f_e(R_a - R_d) + f_s(R_c - R_d)$$

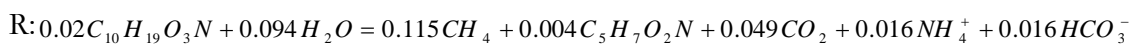
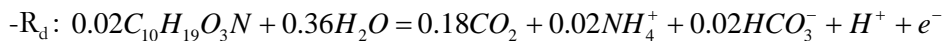
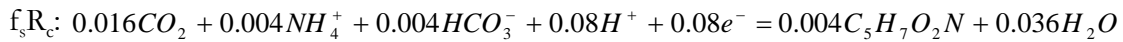
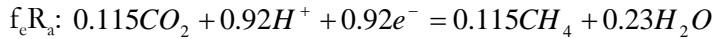
Recordando que  $f_s + f_e = 1$  y simplificando:

$$R = f_e R_a + f_s R_c - R_d$$



De acuerdo a Rittmann y McCarty  $f_s = 0.08$  cuando la fuente de nitrógeno es el amonio.

Esto es:



### 6.5. Cinética

A través de la oxidación de un sustrato y la reducción de otro se obtiene energía y poder reductor para mantener las actividades celulares, estas reacciones son usualmente aceleradas por la acción de las enzimas producidas dentro de la célula. La velocidad a la cual un determinado contaminante es removido depende de dos concentraciones, la primera corresponde a la concentración del catalizador, en este caso de la biomasa activa. La segunda corresponde a la concentración de los sustratos primarios que sirven de donador de electrones.

La ecuación de Monod es la más usada para describir la cinética del crecimiento microbiano. En ella se relaciona la velocidad específica de crecimiento microbiano con la concentración de un sustrato donador de electrones limitante.

$$\mu_{\text{sin}} = \left( \frac{1}{X_a} \frac{dX_a}{dt} \right)_{\text{sin}} = q \frac{S}{K + S}$$



donde:

$\mu$  = tasa de crecimiento específico,  $t^{-1}$

$X_a$  = Concentración de biomasa activa, mg/L

$t$  = tiempo, t

$S$  = concentración del sustrato limitante, mg/L

$q$  = máxima tasa de crecimiento específico, mgDQO/mgSSV

$K$  = constante de saturación media, concentración de sustrato ( $S$ ) a la mitad de la máxima tasa de crecimiento ( $\mu = q / 2$ ), mg/L como se muestra en la figura 5.4

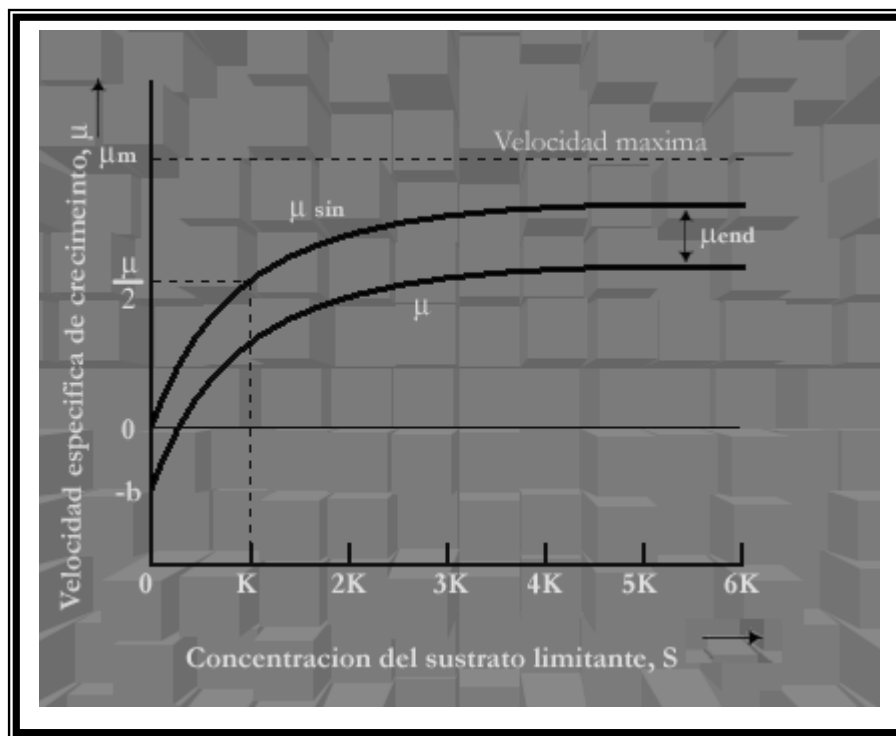


Fig. 5.4 Esquema de los efectos del sustrato limitante en el crecimiento biológico

La figura 5.4 muestra como  $\mu$  varía a distintas concentraciones de  $S$  y que  $\mu = q/2$  cuando  $K = S$ .

En la ecuación anterior se asume que sólo hay crecimiento bacteriano sin embargo la biomasa activa tiene una demanda energética para llevar a cabo funciones celulares tales



como movilidad, reparación, regulación osmótica, transporte y pérdida de calor (Rittmann & McCarty, 2001). Este flujo de energía se conoce como descomposición endógena, ya que la célula se oxida así misma a fin de satisfacer sus necesidades.

La velocidad de descomposición endógena viene dada por la expresión:

$$\mu_{desc} = \left( \frac{1}{X_a} \frac{dX_a}{dt} \right)_{desc.endógena} = -b$$

en donde:

$b$  = coeficiente de descomposición endógena,  $t^{-1}$

$\mu_{desc}$  = tasa de crecimiento específico debido a la descomposición.

Es importante puntualizar que no toda la materia orgánica que se oxida sirve para generar energía, una fracción de ella se acumula como biomasa inerte. De manera que la tasa de oxidación (o respiración para la generación de energía) es:

$$\left( \frac{1}{X_a} \frac{dX_a}{dt} \right)_{resp.} = -f_d b$$

donde  $f_d$  = fracción de biomasa activa biodegradable.

La velocidad a la cual la biomasa activa se convierte en biomasa inerte viene dada por la siguiente expresión:

$$\left( \frac{1}{X_a} \frac{dX_a}{dt} \right)_{inerte} = -(1 - f_d) b$$

De esta manera la tasa de crecimiento neto de la biomasa activa es la suma del crecimiento y la descomposición:



$$\mu = \mu_{\text{sin}} \mu_{\text{desc}} = \mu_m \frac{S}{K + S} - b$$

Debido a que la remoción de sustrato es lo que se busca en cualquier proceso de tratamiento biológico la expresión anterior se re-expresa en términos de utilización del sustrato. De esta manera la ecuación de Monod toma la forma.

$$r_{ut} = -\frac{q_m S}{K + S} X_a$$

Donde  $r_{ut}$  = tasa de utilización del sustrato.

$q_m$  = máxima tasa de utilización del sustrato específica,

El crecimiento bacteriano y la utilización del sustrato están relacionados por la siguiente relación:

$$\mu_m = q_m Y$$

donde:  $Y$  = coeficiente de producción máxima medido durante cualquier periodo finito de crecimiento exponencial, (rendimiento total para síntesis celular).

Es la fracción de electrones convertidos en biomasa durante la síntesis celular.

Finalmente la expresión queda como sigue:

$$r_{net} = Y \frac{q_m S}{K + S} X_a - b X_a$$

donde  $r_{net}$  = la tasa de crecimiento de biomasa activa neta . Por supuesto

$$\mu = r_{net} / X_a = Y \frac{q_{\text{max}} S}{K + S} - b$$

### 6.5.1. Efectos de la temperatura

El crecimiento biológico y la utilización del sustrato son parámetros ligados directamente a la estequiometría de la célula y la generación de energía. En la tabla 5.2 se muestran valores típicos para el proceso de digestión anaerobia, en donde se refleja el costo



y la ganancia de energía durante la síntesis y la oxidación del sustrato donador de electrones.

**Tabla 5.2 Constantes cinéticas para la digestión anaerobia**

Donador de electrones	Aceptor de electrones	Fuente de Carbono	$f_s$	Y	$q_m$	$\mu_m$
Acetato	Acetato	Acetato	0.05	0.035 gVSS/gDBO	8.4 gDBO/ gVSS-d	0.3
H	CO	CO	0.08	0.45 gVSS/ g DBO	1.1 g H g VSS-d	0.5

Fuente: Adaptado de Rittmann & McCarty, 2001

Como es de esperarse la temperatura influye no sólo en la transferencia de gases y la sedimentación de los sólidos biológicos también afecta la actividad metabólica. De modo que a temperaturas por encima de la temperatura óptima, la velocidad de utilización del sustrato se duplica con cada aumento de 10° C en la temperatura. Este fenómeno puede ser aproximado mediante la siguiente expresión:

$$q_{m_T} = q_{m_{20}} (1.07)^{T-20}$$

Donde T está en °C y  $q_{m_{20}}$  es el valor para  $q_m$  a 20 °C. Si este valor no es conocido la relación puede ser generalizada:

$$q_{m_T} = q_{m_T} (1.07)^{(T-T^R)}$$

## 6.6. Balances de materia

Los balances de materia constituyen una herramienta esencial durante el diseño y la modelación de cualquier proceso biológico, para obtener soluciones y parámetros importantes se considera uno de los sistemas más sencillos, el quimiostato.

El quimiostato consta de un reactor totalmente mezclado que tiene concentraciones uniformes y estables de células activas ( $X_a$ ), sustrato(S) y biomasa inerte ( $X_i$ ). El reactor tiene un volumen fijo (V), y la velocidad de flujo de alimentación constante





(Q) tiene una concentración de sustrato  $S^0$  en el cual vendrán compuestos solubles o material que será hidrolizado una vez dentro del reactor. Ver figura 5.5.

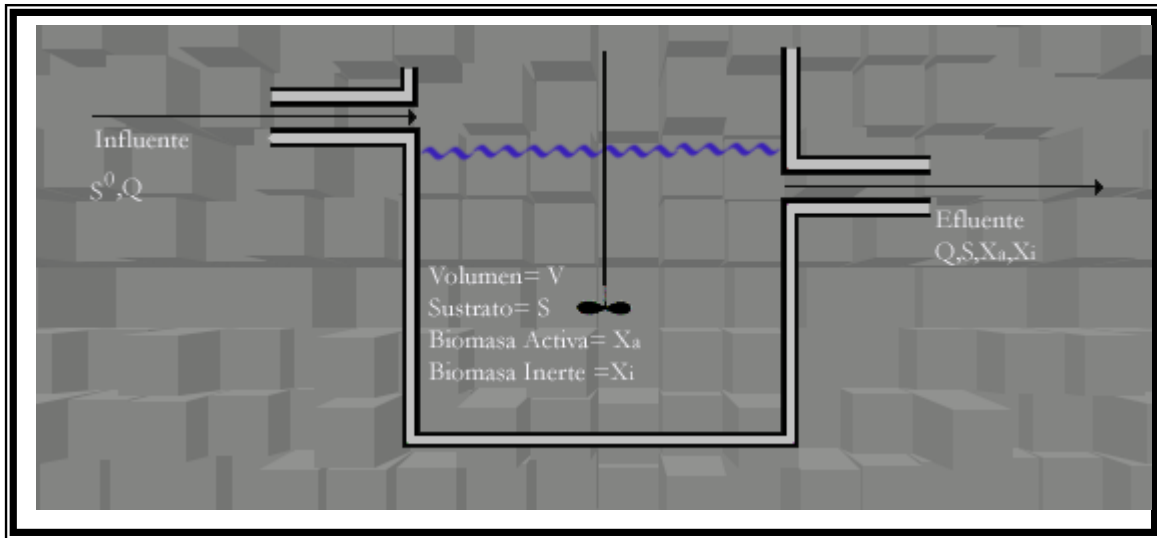


Fig.5.5 Esquema de un Quimiostato

Los primeros balances que deben hacerse involucran la concentración de biomasa activa y la concentración de sustrato (más adelante trataremos los balances correspondientes a la biomasa inerte). Para la biomasa activa contamos con la siguiente ecuación:

$$0 = \mu X_a V - Q X_a$$

Y para el sustrato:

$$0 = r_{ut} V + Q(S^0 - S)$$

Sustituyendo la tasa de crecimiento específico, la velocidad de utilización, el tiempo de retención hidráulico y despejando para el sustrato y la biomasa activa tenemos:

$$0 = Y \frac{q_m S}{K + S} X_a V - b X_a V - Q X_a \quad \Longrightarrow \quad S = K \frac{1 + b\theta}{Y q_m \theta - (1 + b\theta)}$$

y para la biomasa activa:



$$0 = -\frac{q_m S}{K+S} X_a V + Q(S^0 - S) \implies X_a = \frac{Y(S^0 - S)}{1 + b\theta}$$

En capítulos pasados (6.3) mencionamos el concepto de tiempo de retención hidráulico, que usualmente se representa con  $\theta$  y es igual al volumen del reactor entre el flujo de alimentación.  $\theta = V/Q$ . Existe otro concepto llamado tiempo de retención de sólidos, también se conoce como tiempo de retención celular y nos indica la edad de los lodos. Se representa con  $\theta_x$ , tiene unidades de tiempo y se define:

$$\theta_x = \frac{\text{biomasa activa en el sistema}}{\text{velocidad de producción de biomasa activa}} = \mu^{-1}$$

Al ser el recíproco de la velocidad de crecimiento celular, es un parámetro que nos brinda información valiosa del estado del sistema. Si consideramos un sistema en estado estable, entonces

$$\theta_x = \frac{VX_a}{QX_a} = \theta$$

Re-escribiendo las ecuaciones obtenidas para la biomasa activa y el sustrato introduciendo el concepto de tiempo de retención celular tenemos:

$$S = K \frac{1 + b\theta_x}{Yq_m\theta_x - (1 + b\theta_x)} \quad \text{y} \quad X_a = Y(S^0 - S) \frac{1}{1 + b\theta_x}$$

En la figura 5.6 se muestran los efectos de  $\theta_x$  en  $X_a$  y  $S$ . Podemos observar que cuando  $\theta_x$  es muy pequeño,  $S=S^0$ , y  $X_a=0$ . A esta situación se le llama lavado, y debido a que no se remueve sustrato del medio, no hay acumulación de biomasa activa. El valor de  $\theta_x$  en el cual comienza el lavado se conoce como  $\theta_x^{\min}$ , este constituye el límite entre el



estado estable y el lavado y se obtiene sustituyendo  $S^0$  por  $S$  en la ecuación de arriba, de esta manera:

$$S = K \frac{1+b\theta_x}{Yq_m\theta_x - (1+b\theta_x)} \implies \theta_x^{\min} = \frac{K + S^0}{S^0(Yq_m - b) - Kb}$$

$\theta_x^{\min}$  Incrementa si  $S^0$  aumenta pero llega a un valor límite asintótico

$$[\theta_x^{\min}] \lim = \frac{1}{Yq_m - b}$$

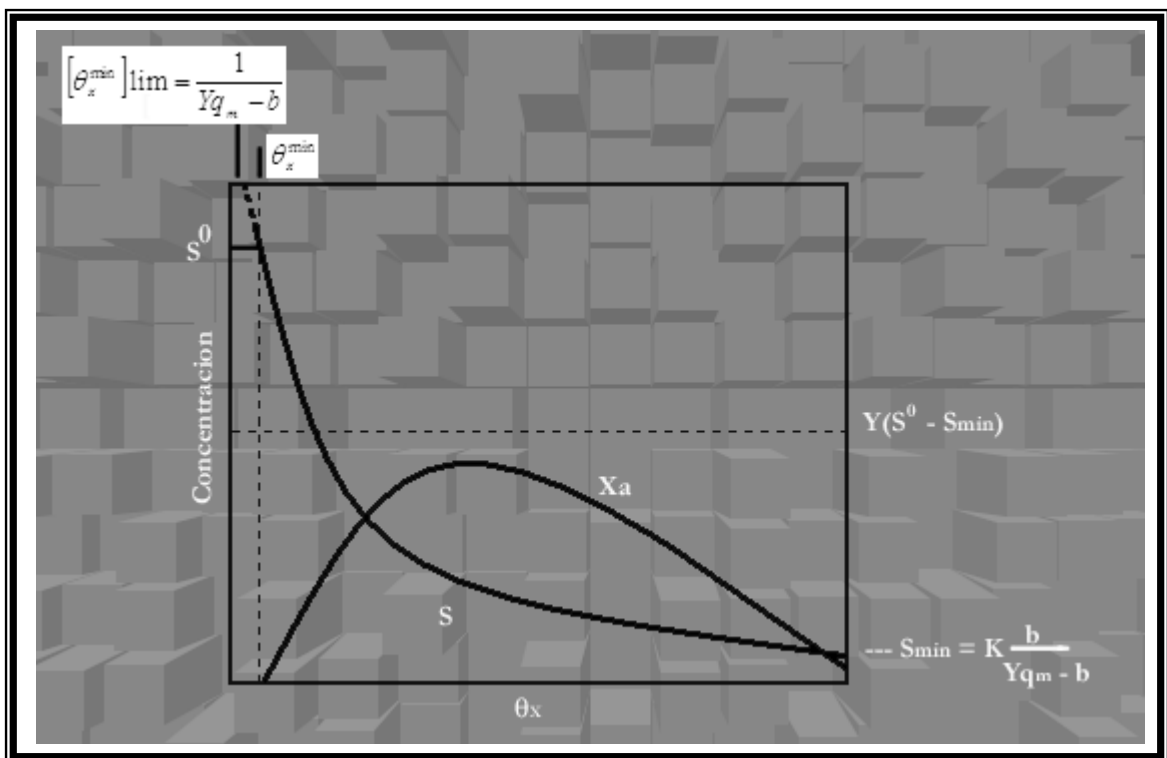


Fig. 5.6 Efecto de  $\theta_x$  en  $S$  y  $X_a$

En la gráfica podemos observar también que para valores altos de  $\theta_x$ ,  $S$  se aproxima a otro valor límite  $S_{min}$ , que corresponde al valor mínimo de la concentración de sustrato a la cual se puede mantener el sistema en estado estable.  $S_{min}$  se obtiene llevando  $\theta_x$  al infinito en la ecuación del sustrato:

$$S = K \frac{1+b\theta_x}{Yq_m\theta_x - (1+b\theta_x)} \implies S_{min} = K \frac{b}{Yq_m - b}$$



Esta ecuación nos indica que sólo cuando  $S > S_{\min}$  la biomasa podrá mantenerse en estado estable, por lo que  $S_{\min}$  es un límite en la concentración del sustrato presente cuando el tiempo del proceso es muy largo.

Es así que podemos reducir  $S$  de  $S^0$  a  $S_{\min}$  al mismo tiempo que incrementamos  $\theta_x$  de  $\theta_x^{\min}$  al infinito, el valor de  $\theta_x$  que escogamos depende del balance entre remoción de sustrato y producción de biomasa.

Los siguientes balances que deben hacerse involucran la biomasa inerte que es el resultado de la respiración endógena, la porción no biodegradable de la célula. El balance de masa correspondiente viene dado por la siguiente expresión:

$$0 = (1 - f_d)bX_aV + Q(X_i^0 - X_i)$$

Donde:

$X_i$  = concentración de biomasa inerte

$X_i^0$  = concentración de biomasa inerte en el flujo de entrada

Resolviendo para  $X_i$

$$X_i = X_i^0 + X_a(1 - f_d)b\theta$$

La suma de  $X_i$  y  $X_a$  es igual a  $X_v$ , la concentración de sólidos suspendidos volátiles (SSV). Si además introducimos el tiempo de retención celular  $X_v$  vienen dada por:

$$\begin{aligned} X_v &= X_i^0 + X_a(1 + (1 - f_d)b\theta_x) \\ &= X_i^0 + Y(S^0 - S)\frac{1 + (1 + f_d)b\theta_x}{1 + b\theta_x} \end{aligned}$$