# 4. El Modelo

El modelo que se presenta a continuación sigue la metodología de Ruge-Murcia (2003) con una modificación. Ruge-Murcia incluye la varianza condicional de la inflación en el proceso estócastico de la inflación como constante, sin embargo, no hay razón para pensar que la varianza de la inflación sea constante[11]. Comunmente en la literatura, la varianza de la inflación es variable en el tiempo, por lo tanto en este documento se toma la varianza condicional de la inflación como variable. Es por esto que, en la ecuación que modela el proceso estocástico de la inflación como función de su varianza condicional, y del proceso de desempleo, la varianza condicional de la inflación es variable, modelandose como un GARCH(1,1). A esta forma funcional se le conoce como GARCH-in-mean (vease Batchelor y Peel (1998)), ya que la varianza se modela como un proceso GARCH y entra como variable fundamental del proceso de la media que se está modelando.

El modelo consiste en un banquero central, el cual esta encargado de implementar la política monetaria; y del público, el cual se asume como un continuo número de individuos idénticos que construyen sus expectativas racionalmente.

## 4.1. La economía

El comportamiento del público está determinado por una curva de Phillips aumentada por expectativas:

$$u_t = u_t^n - \lambda \left(\pi_t - \pi_t^e\right) + \eta_t \tag{4}$$

donde $\lambda > 0$, $u_t$, $u_t^n$, $\pi_t$ son la tasa de desempleo, la tasa natural de desempleo[12], y la

[11] Ruge-Murcia parametriza la varianza condicional de la inflación como función de cambios rezagados al cuadrado del precio del petroleo, el cual asume es exógeno. Según sus resultados, el coeficiente no es estadísticamente diferente de cero, y los resultados son similares a los resultados obtenidos bajo el supuesto de homoscedasticidad condicional.

[12] La decisión de tomar al desempleo como medida de actividad económica real no tiene ningún efecto sobre las derivaciones analíticas del modelo y permite comparar los resultados con las predicciones de la literatura previa.

tasa de inflación, respectivamente; $\pi_t^e$, es el pronóstico de inflación del tiempo $t$ construido en el tiempo $t-1$, hecho por el público; y $\eta_t$, es un choque de oferta, el cual se asume que es independiente e idénticamente distribuido (i.i.d.)$\sim N\left(0, \sigma_\eta^2\right)$.

Por el supuesto de expectativas racionales:

$$\pi_t^e = E_{t-1}\pi_t \tag{5}$$

El conjunto de información del público en el periodo $t-1$, se denota como $I_{t-1}$ y se asume que contiene todos los parámetros del modelo y las observaciones actuales y anteriores de las variables. así como los objetivos de inflación actuales y del periodo siguiente, debido a que estos son anunciados previamente por el banco central.

Se asume que la senda de la tasa natural de desempleo tiene la siguiente forma:

$$\Delta u_t^n = \psi - (1-\delta)\, u_{t-1}^n + \sum_{i=1}^{q-1} \theta_i \Delta u_{t-i}^n + \zeta_t, \tag{6}$$

donde $\zeta_t$ denota el componente impredecible de la tasa natural. Esta especificación incluye como caso especiales los modelos estacionarios $(0 \leq \delta < 1)$ y de raíz unitaria $(\delta = 1)$, empleados comúnmente en la literatura. Se asume que ningún término del polinomio $1 - \sum_{i=1}^{q-1} \theta_i z^i$, tiene raíz unitaria[13]

Modelar la tasa natural de desempleo como variable en el tiempo es importante por dos razones principalmente: Primero, parece factible que cambios en la tecnología, cambios demográficos de la fuerza laboral, cambios en las tasas de sindicalización, entre otros, tengan un efecto sobre el mercado laboral y generen movimientos en la tasa natural. Segundo, el supuesto de que $u_t^n$ sea constante, implica que la serie de desempleo sea ruido blanco. Sin embargo, para la mayoría de los países, como se observa en el cuadro 6 la tasa de desempleo está serialmente correlacionada y es altamente persistente.

El proceso de $u_t^n$ no está influenciado por decisiones de política monetaria, o por tasas de

[13] Se hace este supuesto para excluir la posibilidad de que $u_t^n$ sea $I(2)$.

desempleo de periodos anteriores. Este supuesto refleja la percepción de que la tasa natural esta determinada por factores fuera del alcance de la política monetaria.

Se asume que el banco central tiene un efecto sobre la tasa de inflación mediante un instrumento de política. Este instrumento puede ser una tasa de interés nominal de corto plazo, ó un agregado monetario. El instrumento no puede determinar la inflación completamente:

$$\pi_t = f\left(i_t\right) + \varepsilon_t, \tag{7}$$

donde $f\left(\cdot\right)$ es una función diferenciable, continua y monotónica, $i_t$ es el instrumento de política, y $\varepsilon_t$ es $i.i.d. \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$ es un error de control el porcentaje de inflación que no está determinado por la política monetaria y no está correlacionado ni con $\eta_t$ ni con $\zeta_t$. Como $i_t$ se elije en el periodo $t-1$, entonces $i_t \in I_{t-1}$. Esta especificación implica que el banco central no determina directamente la tasa de inflación después de observar (antes de que el público lo haga) los choques aleatorios. Bajo esta especificación, el banco central tiene el mismo conjunto de información que el público.

## 4.2. El banco central

Se asume que la función de pérdida del banquero central tiene preferencias sobre inflación y desempleo. La función de pérdida es:

$$C\left(\pi_t, u_t\right) = \frac{\left(\exp\left(\alpha\left(\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right)\right) - \alpha\left(\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right) - 1\right)}{\alpha^2} + \left(\frac{\phi}{2}\right)\left(u_t - \widetilde{u}_t\right)^2, \ \alpha \neq 0, \tag{8}$$

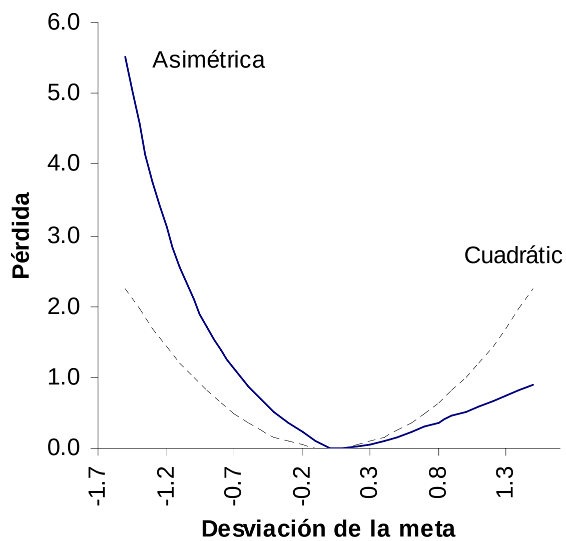
donde $C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widetilde{\pi}_t$ es la meta de inflación, $\widetilde{u}_t$ es la meta de desempleo, y $\phi$ coeficiente positivo que mide la importancia relativa de la desestabilización del desempleo. La meta de inflación es asignada por el banco central antes del periodo $t$. El modelo general para determinar $\widetilde{u}_t$ se presenta en el capítulo 4.2.1.

Se observa cómo el componente de la inflación de la ecuación 8 toma una forma funcional tipo Linex $g(x) = \left(\exp\left(\alpha x\right) - \alpha x - 1\right)/\alpha^2$. La figura 3 presenta la comparación entre una función Linex cuando $\alpha < 0$ y una función cuadrática. Se observa que en la función Linex, para tasas de inflación debajo del objetivo, el término exponencial es el que domina y la pérdida asociada con una desviación negativa aumenta exponencialmente. Para tasas de inflación arriba del objetivo, el término lineal es el se vuelve progresivamente más importante mientras la inflación aumenta y, consecuentemente, la pérdida aumenta linealmente.

Aplicando la regla de L'Hopital, se puede demostrar que la función cuadrática es un caso especial de la función Linex cuando el parámetro de asimetría ($\alpha$) tiene a cero[14]. Esto permite hacer una prueba de hipótesis sobre si las preferencias de inflación del banquero central son cuadráticas, al evaluar si $\alpha$ es significativamente diferente de cero.

La forma funcional de la ecuación 8 es atractiva porque genera una solución de forma cerrada cuando los choques tienen una distribución normal, además de generar claras predicciones empíricas.

Figura 3: Funciones de pérdida bajo diferentes formas funcionales




Preferencias asimétricas suponiendo $\alpha < 0$.

[14]Formalmente,
$\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\exp(\alpha x)-\alpha x-1}{\alpha^2} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{x\exp(\alpha x)-x}{2\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{x^2\exp(\alpha x)}{2} = \frac{x^2}{2}$

### 4.2.1. Determinación de la meta de desempleo

Se asume que la meta de desempleo es proporcional a la tasa natural esperada:

$$\widetilde{u}_t = kE_{t-1}u_t^n, \quad 0 < k \leq 1 \tag{9}$$

Literatura previa (Person y Tabellini, 2000) asume que $\widetilde{u}_t$ es estrictamente menor que la tasa natural ($0 < k < 1$). Este supuesto está basado en la noción de que distorsiones en los mercados de bienes y en el mercado laboral sitúa la tasa natural arriba de la socialmente óptima. Por otro lado, King (1996) y Blinder (1998), sugieren, en base a evidencia institucional, que los banqueros centrales tienen como objetivo la tasa natural de desempleo esperada ($k = 1$). En este estudio se permiten ambas hipótesis.

## 4.3. Equilibrio

Se considera el problema del banquero central quien debe elegir la secuencia de instrumentos que minimicen el valor presente de su función de pérdida:

$$\underset{\{i_{t+s}\}_{s=0}^{\infty}}{Min} \; E_{t-1}\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s C\left(\pi_{t+s}, u_{t+s}\right),$$

$$s.t. \begin{cases} u_t = u_t^n - \lambda\left(\pi_t - \pi_t^e\right) + \eta_t \\ \pi_t^e = E_{t-1}\pi_t \\ \Delta u_t^n = \psi - (1-\delta)\, u_{t-1}^n + \displaystyle\sum_{i=1}^{q-1}\theta_i \Delta u_{t-i}^n + \zeta_t \\ \pi_t = f\left(i_t\right) + \varepsilon_t \\ \widetilde{u}_t = kE_{t-1}u_t^n \end{cases}$$

donde $\beta \in (0,1)$ es la tasa de descuento.

La condición necesaria de primer orden es:

$$E_{t-1}\left[\frac{\exp\left(\alpha\left(\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right)\right) - 1}{\alpha} - \lambda\phi\left(u_t - kE_{t-1}u_t^n\right)\right] = 0 \tag{10}$$

Como la función de pérdida es globalmente convexa, la solución de 10 genera un mínimo que es único. Para encontrar la expectativa condicional de 10 es necesario tomar en cuenta dos resultados. El primero, el supuesto de normalidad de los choques implica que, condicional en el conjunto de información, la inflación tiene un distribución normal. Por lo tanto, $\exp\left[\alpha\left(\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right)\right]$ es log-normal con media $\exp\left[\alpha\left(E_{t-1}\pi_t - \widetilde{\pi}_t + \left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_\pi^2\right)\right]$, donde $\sigma_\pi^2$ es la varianza condicional de la tasa de inflación. El segundo, la expectativa condicional del desempleo es $E_{t-1}u_t = E_{t-1}u_t^n - \lambda\left(E_{t-1}\pi_t - \pi_t^e\right)$. Por lo tanto, la condición de primer orden puede rescribirse como:

$$\frac{\exp\left(\alpha\left(E_{t-1}\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right) + \frac{\alpha^2\sigma_\pi^2}{2}\right) - 1}{2} + \lambda^2\phi\left(E_{t-1}\pi_t - \pi_t^e\right) - \lambda\phi\left(1-k\right)E_{t-1}u_t^n = 0 \qquad (11)$$

Por lo tanto, la condición de primer orden define implícitamente la función de reacción del banquero central[15]:

$$h\left(E_{t-1}\pi_t, \pi_t^e\right) = \frac{\exp\left(\alpha\left(E_{t-1}\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right) + \frac{\alpha^2\sigma_\pi^2}{2}\right) - 1}{\alpha} + \lambda^2\phi\left(E_{t-1}\pi_t - \pi_t^e\right) - \lambda\phi\left(1-k\right)E_{t-1}u_t^n = 0 \qquad (12)$$

Utilizando el teorema de la función implícita, es posible demostrar que:

$$\partial E_{t-1}\pi_t / \partial \pi_t^e = \lambda^2\phi / \left[\lambda^2\phi + \exp\left(\alpha\left(E_{t-1}\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right) + \alpha^2\sigma_{\pi t}^2/2\right)\right] \in (0,1)\,,$$

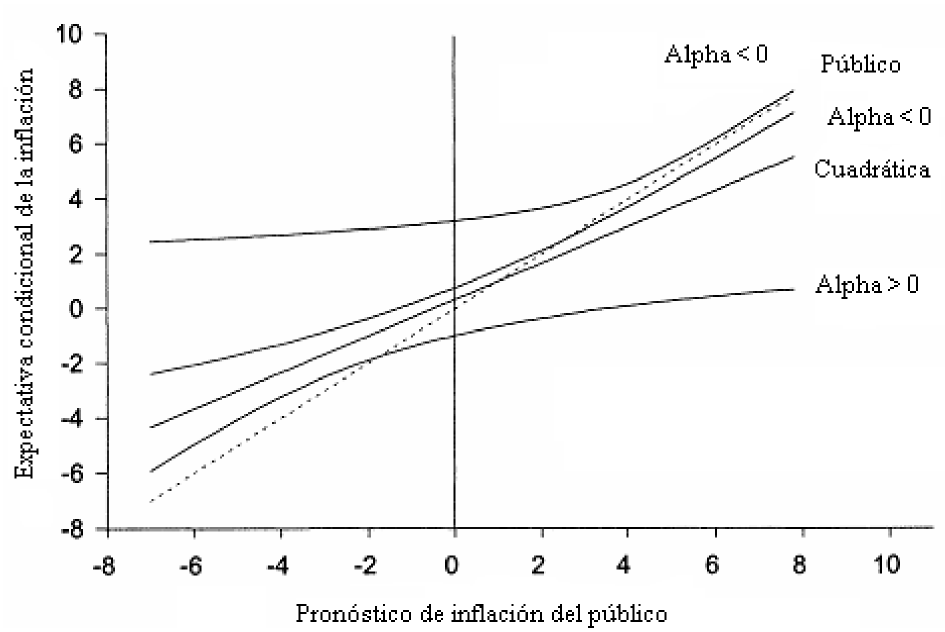
para cualquier valor de $\alpha$. Por lo tanto, la reacción del banquero central es una función monotonicamente creciente sobre el pronóstico de inflación del público. Para observar la forma de la función, es decir, si es cóncava ó convexa, se calcula la segunda derivada:

$$\partial^2 E_{t-1}\pi_t / \partial\left(\pi_t^e\right)^2 =$$
$$-\alpha\lambda^4\phi^2\exp\left[\alpha\left(E_{t-1}\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right) + \alpha^2\sigma_{\pi t}^2/2\right] / \left[\lambda^2\phi + \exp\left(\alpha\left(E_{t-1}\pi_t - \widetilde{\pi}_t\right) + \alpha^2\sigma_{\pi t}^2/2\right)\right]^3,$$

[15] La función de reacción del banco central en el modelo cuadrático (cuando $\alpha \longrightarrow 0$) es:
$E_{t-1}\pi_t = \left(\widetilde{\pi}_t + \lambda^2\phi\pi_t^e + \lambda\phi\left(1-k\right)E_{t-1}u_t^n\right) / \left(1+\lambda^2\phi\right).$
En este caso, el equilibrio de Nash siempre existe y es único.

la cual es menor a cero cuando $\alpha > 0$, igual a cero cuando $\alpha \longrightarrow 0$, y mayor a cero cuando $\alpha < 0$. Por lo tanto, para $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) la reacción del banquero central es una función cóncava (convexa) de $\pi_t^e$.

Figura 4: Funciones de reacción del banco central




Se asume $\widetilde{\pi} = 0,\ \lambda = 2,\ \phi = 0{,}5,\ k = 0{,}8,\ u^n = 5,$ y $\sigma_\pi^2 = 2{,}5^2$.

Podemos observar en la figura 4 el equilibrio de Nash, el cual es la intersección de las curvas de reacción (ecuación 12) y las expectativas del público (ecuación 5). Podemos observar que para valor de $\alpha \leq -1/\left(\lambda\phi\left(1-k\right)E_{t-1}u_t^n\right)$, no existe una tasa de inflación finita en la cual las curvas se intersecten, por lo que, en este caso, no existe el equilibrio de Nash. En el caso en que $\alpha > 0$, el banquero central toma el pronóstico de inflación del público a una tasa decreciente, y la inflación siempre será menor que cuando se suponen preferencias cuadráticas. Para valores muy altos de $\alpha$, surge un sesgo deflacionario en equilibrio, donde la inflación está sistemáticamente por debajo de su objetivo. Cuando $\alpha < 0$ pero $\alpha > -1/\left(\lambda\phi\left(1-k\right)E_{t-1}u_t^n\right)$, el banquero central toma el pronóstico de inflación del público a una tasa creciente, y la inflación siempre será mayor que cuando se suponen preferencias cuadráticas.

**Condiciones para la existencia y unicidad del equilibrio de Nash:**

Proposición 1. Cuando $1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n > 0$, existe un único $\pi_t^e = E_{t-1}\pi_t$ tal que $h\,(E_{t-1}\pi_t, \pi_t^e) = 0$.

Prueba. Primero se prueba la existencia del equilibrio. Se construye

$$\pi_t^e = E_{t-1}\pi_t = \widetilde{\pi}_t - \left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\pi t}^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n\right) \tag{13}$$

Incorporando la ecuación 13 en la 12 y tomando $\pi_t^e = E_{t-1}\pi_t$ obtenemos $h\,(E_{t-1}\pi_t, \pi^e) = 0$.

Para probar unicidad, se asume que existe un segundo pronóstico de inflación $\widehat{\pi}^e = \widetilde{\pi} - (\alpha/2)\,\sigma_{\pi t}^2 + (1/\alpha)\ln\left(1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n\right) + x$, el cual también se ubica en la línea de 45° en el plano $(\pi_t^e, E_{t-1}\pi_t)$ y satisface $h(E_{t-1}\pi_t, \pi_t^e) = 0$. Reemplazando $\widehat{\pi}^e$ en la ecuación 12 y simplificando para obtener $[1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n]\,[\exp(\alpha x) - 1]\,/\alpha = 0$. Como $1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n > 0$ y $\alpha \neq 0$, entonces $x = 0$.■

A partir de la proposición 1 tenemos:

Corolario 1. En el caso especial en el que el banquero central marca como meta la tasa natural de desempleo esperada, siempre existe un único $\pi_t^e = E_{t-1}\pi_t$, tal que $h(E_{t-1}\pi_t, \pi_t^e) = 0$.

Prueba. El resultado sigue de observar que cuando $k = 1$, la condición $1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n > 0$ siempre se satisface.■

A partir de la ecuación 13 podemos observar que dependiendo del signo de $\alpha$, la inflación es una función creciente o decreciente de su varianza condicional. Recuérdese que cuando la función de pérdida es cuadrática, la equivalencia se mantiene y la solución del modelo es la misma sin importar si existe incertidumbre o no. Por el otro lado, cuando la función de pérdida es asimétrica en cuanto a inflación, el costo marginal de separarse de $\widetilde{\pi}_t$ no es lineal en cambios en la inflación, sino convexo (cóncavo) cuando $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$). Cuando $\alpha > 0$, un incremento en la incertidumbre aumenta el costo marginal esperado de desviarse de $\widetilde{\pi}_t$.

Entonces, la incertidumbre induce un comportamiento prudente de parte del banco central.

A continuación se derivan los procesos estocásticos de las tasas de inflación y desempleo.

Tomando expectativas condicionales en ambos lados de 7, nótese que $i_t$ forma parta del conjunto de información del público, substituyendo de nuevo en 7, y utilizando 13 tenemos:

$$\pi_t(\alpha) = \widetilde{\pi}_t - (\alpha/2)\,\sigma_{\pi t}^2 + (1/\alpha)\ln(1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n) + \varepsilon_t \tag{14}$$

La notación $\pi_t(\alpha)$ hace explicita la dependencia que tiene proceso inflacionario del parámetro que mide la asimetría de las preferencias del banquero central.

Para derivar el proceso estocástico del empleo, incorporamos la ecuación 14, y se utiliza el supuesto de expectativas racionales para obtener: $u_t = u_t^n - \lambda\varepsilon_t + \eta_t$.La tasa de desempleo en equilibrio no difiere sistemáticamente de la tasa natural. Por lo que, dado que $u_t^n$ esta serialmente correlacionado, $u_t$ está serialmente correlacionado también. Descomponiendo el proceso de la tasa natural como $u_t^n = E_{t-1}u_t^n + \zeta_t$ obtenemos:

$$u_t = E_{t-1}u_t^n + \zeta_t - \lambda\varepsilon_t + \eta_t \tag{15}$$

## 4.4. Implicaciones del modelo

Las predicciones del modelo pueden hacerse en términos de la tasa de inflación o de su desviación del objetivo. Es trivial reescribir la ecuación 14 como:

$$\pi_t(\alpha) - \widetilde{\pi}_t = -(\alpha/2)\,\sigma_{\pi t}^2 + (1/\alpha)\ln(1 + \alpha\lambda\phi\,(1-k)\,E_{t-1}u_t^n) + \varepsilon_t \tag{16}$$

Se considera primero el caso en que $\alpha < 0$, lo cual significa que el banquero central le otorga menos peso a desviaciones positivas del objetivo que a desviaciones negativas. Por lo tanto, $-(\alpha/2)\sigma_\pi^2 > 0$, la desviación promedio de la inflación de su meta es positiva sin importar los valores del resto de los parámetros. En el caso en que $\alpha > 0$, lo cual significa que el banquero central le otorga más peso a desviaciones positivas del objetivo que a desviaciones negativas. Entonces $(\alpha/2)\sigma_{\pi t}^2 > 0$,y, para cierto parámetros, es posible que su magnitud sea lo suficientemente grande como para que $\pi_t(\alpha) - \widetilde{\pi}_t < 0$. Entonces, la inflación puede estar, en promedio por debajo de la meta anunciada.

Con fines de comparación se hacen algunas de las implicaciones del modelo cuadrático, el cual, tomando se obtiene el límite de la ecuación 16 cuando $\alpha \longrightarrow 0$:

$$\pi_t(0) - \widetilde{\pi}_t = \lambda\phi(1-k)E_{t-1}u_t^n + \varepsilon_t$$

Dado que el término $\lambda\phi(1-k)E_{t-1}u_t^n$ es no-negativo, la realización promedio de $\pi_t(0)-\widetilde{\pi}_t$ también es no-negativa. Cuando $0 < k < 1$, el modelo predice que la inflación se encuentra sistemáticamente por arriba del objetivo anunciado. El modelo cuadrático también implica que la relación entre la inflación y el desempleo es lineal y que la varianza condicional no tiene poder explicativo. Si se generaliza el modelo y se determina que el banco central tiene como meta la tasa natural de desempleo ($k = 1$), el modelo predice que la desviación promedio de la inflación de su meta es cero.

Una comparación de los modelos más directa puede obtenerse de la siguiente manera:

$$[\pi_t(\alpha) - \widetilde{\pi}_t] - [\pi_t(0) - \widetilde{\pi}_t] = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\pi t}^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(1 + \alpha\lambda\phi(1-k)E_{t-1}u_t^n\right) - \lambda\phi(1-k)E_{t-1}u_t^n \quad (17)$$

Se nota que cuando $\alpha \longrightarrow 0$, la ecuación 17 tiende a cero, es decir, la diferencia entre los modelos tiende a cero. Para valores negativos de $\alpha$, el modelo asimétrico predice desviaciones positivas que son más grandes que las desviaciones (también positivas) que predice el modelo cuadrático, por lo que cuando $\alpha < 0$, la ecuación 17 es positiva. Para valores positivos de $\alpha$, el modelo asimétrico predice desviaciones negativas, ó desviaciones positivas que son menores que las desviaciones positivas que predice el modelo cuadrático. Por consecuencia, cuando $\alpha > 0$, la ecuación 17 es negativa.

En literatura previa, se predice que las tasas de inflación y desempleo están positivamente correlacionadas cuando $0 < k < 1$. Sin embargo, bajo preferencias asimétricas la relación no es lineal. El análisis de esta relación hecho en el capítulo 3.3 sugiere que un modelo no-lineal genera un ajuste más preciso de la relación entre inflación y desempleo que una especificación lineal.

En el caso especial cuando el banco central fija como objetivo la tasa natural de desempleo ($k = 1$), el modelo predice que no existe una relación sistemática entre la inflación y el desempleo. Sin embargo, puede surgir un sesgo entre la inflación y su objetivo, en el caso en que $\alpha < 0$. En el cuadro 8 se presentan las predicciones más importantes de los modelos con preferencias asimétricas y cuadráticas.

Cuadro 8: Resumen de las predicciones de los modelos cuadráticos y asimétricos

| Predicción | Modelo | |
|---|---|---|
| | Cuadrático | Asimétrico |
| Relación positiva entre $\pi_t - \widetilde{\pi}_t$ y $u_t$ | Sí | Sí |
| Relación no-lineal entre $\pi_t - \widetilde{\pi}_t$ y $u_t$ | No | Sí |
| Desviación promedio de la inflación de su objetivo es no negativa | Sí | No necesariamente |
| Varianza condicional de la inflación ayuda a pronosticar $\pi_t - \widetilde{\pi}_t$ | No | Sí |