UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ACTUARÍA, FÍSICA Y MATEMÁTICAS

IMPLEMENTACIÓN DE UNA HEURÍSTICA PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE DISEÑO TERRITORIAL

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE

MARIO ANTONIO SOLANA VIDAL

ID: 152017

DIRECTOR

DR. JUAN ANTONIO DÍAZ GARCÍA

SAN ANDRÉS CHOLULA, PUEBLA. PRIMAVERA, 2019

Tesis que, para completar los requisitos del Programa de Honores presenta el estudiante Mario Antonio Solana Vidal, 152017

Director de Tesis

Dr. Juan Antonio Díaz García

Presidente de Tesis

Dra. Dolores Edwiges Luna Reyes

Secretario de Tesis

Dra. Victoria Rebillas Loredo

Índice

Índice de tablas

Índice de algoritmos

Resumen

En esta tesis se estudia un problema que consiste en dividir un área geográfica en territorios que cumplan ciertas características o criterios de planificación. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de diseño territorial y para efectos de esta tesis nos basaremos en un modelo propuesto en la literatura que considera la división de un área geográfica en territorios compactos, contiguos y balanceados, con respecto a una o varias medidas de actividad. En este trabajo se propone un método heurístico para obtener soluciones factibles del problema. La estrategia de solución utilizada en el heurístico propuesto consta de varios pasos. Primero se construyen soluciones que satisfagan el criterio de compacidad, usando a una medida de dispersión, y que estén balanceados con respecto a las distintas medidas de actividad. Posteriormente, esas soluciones son modificadas para que satisfagan también las restricciones de conectividad o contigüidad. Para comprobar el desempeño del método propuesto se utiliza un conjunto de instancias de prueba del problema disponible en la literatura y los resultados proporcionados por el método heurístico propuesto se comparan con las soluciones óptimas de las instancias de prueba del problema. De acuerdo con los resultados obtenidos, el método propuesto proporciona soluciones óptimas o muy cercanas a las soluciones óptimas con un esfuerzo computacional razonable, cuando se compara con el esfuerzo computacional requerido por un método de solución exacto para obtener las soluciones óptimas.

Palabras clave: Diseño territorial, Localización, Métodos Heurísticos.

1. Introducción

Los problemas de diseño territorial no son otra cosa más que la división de un área geográfica en distritos con características similares entre sí. Dichas características se definen dependiendo del problema y lo que se pretende estudiar. Algunos ejemplos podrían ser por tamaño de población, por zona postal e incluso por zonas estratégicas de ventas. Existen muchas aplicaciones para implementar la división en distritos, entre las más significativas destacan dos: 1) la división geopolítica de regiones o estados para asegurar justicia en relación a la cantidad de votantes en cada distrito electoral y 2) la división en distritos de venta con el fin de balancear la carga de trabajo y las ventas potenciales de todos los territorios. Hess, Weaver, Siegfeldt, Whelan, y Zitlau (1965) fueron de los primeros en tomar en cuenta la población y no solo el área para la división y a partir de ellos se ha incorporado el diseño territorial en muchos trabajos.

Para entender por completo el diseño territorial es necesario describir las formas en las cuales se pueden dividir estos problemas e identificar sus aplicaciones potenciales. Kalcsics, Nickel, y Schröder (2005) identifican tres grandes categorías para los problemas de diseño territorial: 1) partición política, 2) servicios y ventas territoriales y 3) otras aplicaciones. A continuación describiremos cada uno de estos temas y las subclases que se derivan de los mismos.

Los tipos de problemas ligados a la partición política, generalmente provienen de la necesidad de crear condiciones justas para las elecciones de algún candidato por medios democráticos. Si no se dividen apropiadamente las regiones o distritos, se puede dar una ventaja importante a algún candidato sobre otro. Incluso se ha intentado emplear la partición política de manera desleal para deliberadamente favorecer a candidatos que simpatizan con los partidos políticos de los actuales gobernantes. Es ahí cuando el problema no sólo radica en emplear este método de diseño territorial sino también en determinar qué características tomar en cuenta de acuerdo a cada país, estado o región. Unas de estas características pueden provenir de criterios demográficos, los cuales podrían ser: 1) por igualdad de población o 2) por representación de minorías. El primero se enfoca en el principio de un voto por persona y cada voto tiene el mismo peso que el de los demás, mientras que el segundo intenta tomar en cuenta a algunas minorías para que su voto tenga las mismas oportunidades que las del resto, un ejemplo común de esto sería el “Electoral College” en Estados Unidos. Otra característica sería utilizando criterios geográficos, tales como, compacidad, contigüidad y respetando fronteras. La compacidad es un término que se usa para construir un distrito en el cual la distancia entre todos los puntos del contorno con respecto a su centro no sean de gran magnitud ni muy diferentes entre sí, mientras que la contigüidad busca que todo el distrito esté conectado entre sí, es decir, que para ir de un punto a otro del territorio no sea necesario salir de él. Por último algunos autores también toman en cuenta otros criterios, como por ejemplo datos económicos, con el fin de que exista un cierto balance al considerar la división del área geográfica en territorios.

Siguiendo con las ideas propuestas en Kalcsics y cols. (2005), la segunda categoría, mencionada anteriormente, está vinculada con aplicaciones relacionadas con servicios y ventas. El propósito principal de esta categoría de problemas de diseño territorial, es encontrar la mejor manera de dividir una región geográfica para cumplir con un propósito cuantificable, que favorezca la operatividad, es decir, se busca balancear de manera justa y óptima (con respecto a un criterio numérico). Existen muchos criterios para estos tipos de problemas, los más comunes se presentaran a continuación. El primer criterio es el organizacional, este criterio abarca características como el número de distritos en que se va a dividir el territorio, que generalmente es proporcional al alcance o poder de venta que se pueda ofrecer. Otra característica serían las áreas básicas, las cuales son unidades geográficas ya existentes, como por ejemplo, las manzanas, las colonias o los AGEB's (áreas geoestadísticas básicas), que en nuestro país son las unidades básicas utilizadas por el Instituto de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), para las cuales se cuenta con un agregado de información (población, número de viviendas, etc.), con el propósito de reducir la complejidad del problema, proporcionando información de planificación muy valiosa, como por ejemplo, para la planificación de rutas, la identificación de nuevos puntos de venta potenciales, etc. Cada una de estas áreas básicas se deben asignar exclusivamente a un distrito, y esta estrategia permite reducir problemas de arbitraje entre distritos y crear una relación más sana entre vendedores y clientes desde el principio y a largo plazo. La última característica del criterio de organización podría ser la colocación del representante de ventas dentro del distrito. Los vendedores tienen la responsabilidad de visitar y atender a sus clientes. Por ello, es necesario posicionar estratégicamente la sede de los vendedores para ser más eficientes y reducir los costos.

Existen también los criterios geográficos en la misma categoría de aplicaciones en los sectores de servicios y ventas territoriales, ya que el personal encargado de proporcionar un servicio, o los vendedores, se necesitan mover dentro de sus distritos o los territorios que les son asignados. El primer factor, mencionado anteriormente es la contigüidad, es decir, se debe poder llegar a todo el territorio sin tenerse que salir de él. Una segunda característica es la accesibilidad, es decir, se tienen que tomar en cuenta los accidentes geográficos naturales como montañas, acantilados y ríos, que pueden dificultar el paso directo de una zona a otra y también los factores humanos, si existen muchos caminos de tierra, un mal transporte público o manifestaciones recurrentes que impida a los vendedores cumplir con sus objetivos. También, que el territorio sea compacto juega un papel muy importante en el tema de ventas, ya que, dependiendo de donde se posicione al representante de ventas, las distancias a recorrer en sus itinerarios pueden afectar la efectividad y la eficiencia de los mismos. Es importante evitar todas aquellas actividades que no agregan valor. El último criterio va relacionado a las actividades; este criterio responde a la pregunta de qué se está vendiendo y bajo qué características. El criterio de actividad se divide en dos, en balanceo y en rendimiento máximo. El propósito de balanceo es que en todos los distritos del territorio haya una misma cantidad de trabajo, demanda, ventas, etc., para que haya equidad entre los representantes de venta. Las actividades para maximizar rendimiento, son primordiales en ejercicios de ventas, aunque no se deben de descartar los demás factores, ya que muchas veces por querer buscar solo rendimientos, no se toman en cuenta a los trabajadores, su alcance o simplemente la capacidad máxima que un humano pueda proporcionar bajo situaciones normales de operación.

Aparte de los problemas más comunes que tienen relación con política y servicios o ventas, muchos autores han abordado el problema en otras aplicaciones, tales como la ecología, los desastres naturales, la logística, etc. También se nos hace importante incluir estas aplicaciones para reforzar el interés en el estudio de estos problemas, ya que se pueden encontrar algunas situaciones en la cuales es necesario considerar características únicas que no encajan en ninguna de las dos grandes clases anteriores.

En este documento nos basaremos en los supuestos planteados en el trabajo sobre problemas de diseño territorial propuesto por Salazar-Aguilar, Ríos-Mercado, y Cabrera-Ríos (2011) en los cuales se busca dividir un área geográfica de interés en territorios de ventas, usando criterios de compacidad, contigüidad y balanceo con respecto a una o varias medidas de actividad. En particular, en este trabajo se propone un método heurístico para encontrar soluciones factibles del problema. Dicho método, a partir de un procedimiento que permite seleccionar las medianas de cada uno de los territorios, resuelve un problema de asignación de unidades básicas a cada una de las medianas, que satisfagan los requerimientos de balanceo para cada una de las actividades, minimizando la suma de distancias entre cada una de las unidades básicas y la mediana a la que son asignadas. Posteriormente, se considera un procedimiento iterativo en donde se considera un ajuste de las medianas de cada territorio y se resuelve de nueva cuenta el problema de asignación para el conjunto de medianas ajustado. El procedimiento termina cuando, durante la fase de ajuste de las medianas, no se hace ningún cambio. es decir, el conjunto de medianas no sufre ningún ajuste. Finalmente, para el conjunto de medianas ajustado, se incorporan, de manera iterativa, restricciones que garantizan la contigüidad de la solución. Para evaluar el procedimiento heurístico propuesto, se usan el conjunto de instancias generadas por Salazar-Aguilar y cols. (2011) y los resultados obtenidos con el procedimiento propuesto se comparan con las soluciones óptimas. De acuerdo con los resultados obtenidos se puede observar que el método heurístico propuesto proporciona soluciones de muy buena calidad (soluciones óptimas o cercanas a las soluciones óptimas) con un esfuerzo computacional razonable.

El contenido de este trabajo es el siguiente. Primero, en las Secciones 2 y 3, se muestran la justificación y los objetivos de este trabajo, respectivamente. Posteriormente, en la Sección 4 profundizaremos en el tema revisando algunos trabajos de la literatura, en los cuales, diversos autores has propuesto distintas aplicaciones, modelos y procedimientos de solución para problemas de diseño territorial. En la sección 5, explicaremos con detalle la versión del problema de diseño territorial considerada en este estudio, sus características, su formulación matemática y el método heurístico propuesto para encontrar soluciones factibles del problema. Más adelante, en la Sección 6 se muestra la información relativa a los resultados obtenidos con el método propuesto y que son comparados con un método exacto de solución, para poder evaluar el desempeño del algoritmo propuesto. Finalmente, en la Sección 7 se proporcionan algunas reflexiones sobre el método de solución considerado en este trabajo para obtener soluciones factibles del problema de diseño territorial considerado y se identifican posibles trabajos futuros.

2. Justificación

Se eligió elaborar esta tesis en torno al tema de Diseño territorial por su alcance en muchas áreas diferentes y por sus aplicaciones prácticas en diversos ámbitos. Los problemas de diseño territorial los podemos encontrar de manera recurrente en el mundo real. En la literatura se pueden encontrar diversos trabajos relacionados con temas de diseño territorial. Entre ellos, se pueden encontrar trabajos donde se proponen modelos matemáticos y procedimientos heurísticos o exactos.

El problema de diseño territorial estudiado en este trabajo pertenece a la clase de problemas NP-duros. Es por ello, que el desarrollo de métodos heurísticos para este problema, se justifica plenamente, ya que, resolver el problema de manera exacta, puede no ser una alternativa viable, sobre todo cuando se requieren resolver instancias del problema de gran tamaño. Es por ello que el contar con un método heurístico, que proporcione soluciones factibles con un esfuerzo computacional razonable, puede ser de gran utilidad en aplicaciones prácticas del problema. Además, el uso de métodos heurísticos, en el contexto de los métodos exactos, también puede ser de utilidad, ya que las soluciones obtenidas con un heurístico pueden ser usadas como incumbentes en un método exacto, con el propósito de reducir el esfuerzo computacional requerido.

3. Objetivo

El objetivo de esta tesis es proponer e implementar una heurística que sea capaz de obtener soluciones factibles de buena calidad con un esfuerzo computacional razonable, para un problema de diseño territorial.

4. Marco Teórico

En esta sección del trabajo se muestra una revisión de la literatura existente sobre problemas de diseño territorial. En particular, se hace un resumen de la revisión de la literatura presentada en Kalcsics y cols. (2005), y se amplia con una revisión de trabajos posteriores a los reportados en ese trabajo.

Existen muchos casos de aplicación práctica en los cuales se requiere dividir un área geográfica en territorios. Por ejemplo:

- en los casos en los que se desea dividir el área geográfica en distritos electorales, con criterios políticos,
- en los casos en que se desea encontrar una partición de un área geográfica en territorio de ventas y/o servicios para que sean atendidos de manera efectiva, manteniendo un balance en la carga de trabajo del personal, y
- en los casos en que la división tiene como propósito facilitar las actividades de logística, por ejemplo para el reparto de mercancías.

Por eso, no es extraño que hoy en día muchos autores estén proponiendo distintos modelos de diseño territorial para atacar de manera eficiente, y en algunos casos, para resolver de manera óptima, problemas específicos de aplicación práctica de diseño territorial.

Hess y cols. (1965) fueron de los primeros en resolver un problema de esta índole de manera computacional y su enfoque está relacionado en la división con propósitos políticos. Posteriormente, Hess y Samuels (1971) lo incorporaron para resolver problemas de diseño territorial en áreas de ventas y áreas de servicio. A partir de estos dos trabajos seminales, muchos autores han incorporado el diseño territorial aplicados a distintas situaciones de aplicación práctica. Frankovich (2012) lo implementó para reducir los retrasos y costos en aeropuertos, Fernández, Kalcsics, Nickel, y Ríos-Mercado (2010) lo incorporan en la logística de empresas alemanas para reciclar desperdicios electrónicos y Salazar-Aguilar y cols. (2011) lo enfocan en la distribución de productos para una empresa de bebidas embotelladas en México.

Kalcsics y cols. (2005) proporcionan una excelente revisión de la literatura relacionada con problemas de diseño territorial. En esta revisión de la literatura se proporciona una revisión de trabajos entre los años de 1965 y 2003. Ellos dividieron su revisión de la literatura en dos grandes áreas:

1. trabajos relacionados con la división de una área geográfica en distritos electorales, y
2. trabajos relacionados con la división de un área geográfica en territorios de venta y/o servicios.

En general, en la literatura se pueden encontrar trabajos de diseño territorial donde se consideran uno o varios criterios en el diseño de los territorios. Los criterios más comunes son:

- Balanceo: que todos los territorios estén balanceados con respecto a una o más medidas de actividad, por ejemplo, población, potencial de ventas, etc.

- Contigüidad: que no sea necesario salir de un territorio para recorrerlo. Es decir, que para ir de un sitio a otro del territorio, no sea necesario salir de él.
- Compacidad: que, en la medida de lo posible, las distancias entre las diferentes unidades del territorio sean pequeñas. No existe mucho consenso con respecto a cuál es la mejor medida de compacidad, y en la literatura se pueden encontrar distintas propuestas de medida para este criterio.

4.1. División política

A continuación se muestra un resumen de la revisión de la literatura, en el área de diseño de distritos electorales, proporcionada por Kalcsics y cols. (2005) y posteriormente esa revisión de la literatura se complementa con trabajos posteriores a los reportados por estos autores. En el caso de problemas de diseño territorial aplicados al diseño o rediseño de distritos electorales, es importante el concepto de "gerrymandering". Este es un término muy importante en los temas de política ligados a diseño territorial, ya que hace referencia a la manipulación de un área geográfica para obtener una ventaja significativa y desleal en las elecciones.

En la revisión de la literatura proporcionada por Kalcsics y cols. (2005), los trabajos relacionados con el diseño o rediseño de distritos electorales se muestran en orden cronológico y para cada caso se indican los criterios considerados en el diseño territorial:

- Hess y cols. (1965) estudian el problema de reconfiguración de los distritos usando criterios de contigüidad y compacidad.
- Garfinkel y Nemhauser (1970) proponen un algoritmo de enumeración implícita para la reconfiguración de distritos electorales en los Estados Unidos de América usando criterios de contigüidad y compacidad.
- Helbig, Orr, y Roediger (1972) proponen un método de solución para la reconfiguración de distritos electorales considerando restricciones de contigüidad, balanceo y compacidad.
- Bodin (1973) propone una algoritmo heurístico de agrupamiento para la determinación de distritos electorales considerando el criterio de contigüidad.
- Bourjolly, Laporte, y Rousseau (1981) proponen una heurística para determinar distritos electorales en la isla de Montreal, Canadá, considerando criterios de contigüidad, compacidad y adicionalmente, datos políticos.
- Nygreen (1988) propone un modelo de programación entera, un algoritmo de partición de conjuntos y un método de programación entera para un problema de división electoral considerando criterios de contigüidad, balanceo y compacidad.
- Hojati (1996) propone un método para el problema de diseño de distritos electorales que usa una relajación Lagrangeana para la determinación de los centros de cada uno de los distritos. Posteriormente, usa una técnica de transporte para la determinación de la asignación de la población a los centros obtenidos con la relajación Lagrangeana y, finalmente, resuelve un problema de división mediante una secuencia de problemas de transporte capacitado. En este trabajo se considera solo el criterio de compacidad.

- George, Lamar, y Wallace (1997) proponen un método de solución basado en una formulación de un modelo de optimización de redes, considerando criterios de contigüidad, balanceo y compacidad.
- Ricca y Simeone (1997) proponen un método para la partición de un área geográfica en distritos electorales que considera criterios de contigüidad, balanceo y compacidad.
- Mehrotra, Johnson, y Nemhauser (1998) modelan el problema de reconfiguración de distritos electorales como un problema de partición de grafos restringido y desarrollan una metodología de solución especializada basada "Branch & Price" y un método heurístico. En este trabajo se consideran criterios de contigüidad, balanceo y compacidad.
- Cirincione, Darling, y O'Rourke (2000) consideran un procedimiento para el problema de diseño de distritos electorales usando criterios de contigüidad, balanceo y compacidad, así como también criterios raciales, concluyendo que estos criterios influyen en la división de los distritos electorales.
- Bozkaya, Erkut, y Laporte (2003) proponen un heurística tabú para el problema de diseño de distritos electorales incorporando criterios de contigüidad, balanceo y compacidad y también criterios de homogeneidad socio-económica.
- Forman y Yue (2003) proponen un algoritmo genético para el problema de división electoral considerando criterios de contigüidad, balanceo y compacidad.

A continuación, se proporciona la descripción de trabajos de diseño territorial aplicados al área de diseño o rediseño de distritos electorales, posteriores a los trabajos incluidos en la revisión de la literatura proporcionada en Kalcsics y cols. (2005).

Shirabe (2009) se enfoca más en contigüidad en lugar de la compacidad. Generalmente los problemas de diseño territorial son altamente combinatorios y difíciles de resolver por lo que relajar la satisfacción de alguno de los criterios deseables es indispensable para no probar cada caso y llegar a una solución, si no la óptima, de calidad razonable, en un tiempo adecuado. El propósito de este artículo es proponer un modelo en el cuál la contigüidad es una restricción fija e inamovible, se relajan las restricciones de balance de la población o la restricción de compacidad llegando a un resultado lo suficientemente bueno. Al relajar restricciones como la de balanceo se debe de tener cuidado, ya que si se usan leyes de una persona un voto, relajar de más esta restricción pude dar una solución anticonstitucional en el caso de Estados Unidos. Se concluye que este modelo es bueno para encontrar el óptimo en instancias pequeñas con pocos distritos ya que el costo computacional es muy elevado a medida que el problema crece en tamaño, por su explosión combinatoria. Aún así, aunque se reconoce la necesidad de una heurística para mejorar los resultados, se argumenta que este modelo es útil para comparar cuán buena puede ser una heurística.

En Fryer Jr y Holden (2011) proponen una medida de compacidad para poder dividir de manera justa a los votantes de cada estado en EEUU. Ellos plantean que, aunque el gobierno de los Estados Unidos reconoce la necesidad de dividir correctamente los estados en distritos, aún no había un modelo justo que pudiera aplicarse. Para el modelo que proponen toman en cuenta que todos los distritos tengan la misma población, que los distritos electorales sean contiguos y por supuesto sean compactos. Ellos se enfocan en qué tan extraña forma pueda tener un distrito para evitar acusaciones de “gerrymandering”. Fryer Jr y Holden (2011) construyeron un índice basado en 3 propiedades deseables para resolver la compacidad; primero, que la población sea anónima, es decir, no se toman datos políticos que dividan a la población; en segundo lugar, que entre más distancia tiene que recorrer un votante para ejercer su voto, mayor es la ponderación en el índice; y por último, no se toma en cuenta la densidad, número de distritos y la escala del territorio. Después de su experimentación, concluyeron que su modelo es útil para modelar cada estado en EEUU y en tiempo real. También, según ellos, su modelo de maximizar compacidad tiene una respuesta en los votantes prometedora.

En el trabajo de Rincón-García y cols. (2017), proponen tres métodos heurísticos para el problema de distritos electorales usando criterios de contigüidad, balanceo y compacidad: 1) optimización de enjambre de partículas (DPSO por sus siglas en inglés), 2) colmena de abejas artificiales (DABC por sus siglas en inglés) y 3) método de composición musical (DMMC por sus siglas en inglés) los cuales se comparan con un modelo de temple simulado (SA por sus siglas en inglés) que se usa en México, y es una heurística basada en el mejoramiento de una solución inicial mediante búsqueda en un entorno. Estos modelos se implementaron en ocho estados de la República Mexicana y se compararon los resultados para confirmar que las tres heurísticas propuestas, que son heurísticas basadas en poblaciones, son mejores que el SA. Como resultado, los algoritmos DABC y DMMC obtienen soluciones del problema con poco costo computacional. Comparando estos dos últimos algoritmos, el DMMC arroja soluciones de mejor calidad pero requiere de mucho mayor esfuerzo computacional, ya que le toma aproximadamente cuatro veces más tiempo que al heurístico DABC. Se concluye que dependiendo la dificultad del problema se decida entre el DABC y el DMMC y se identifica, como trabajo futuro, mejorar el método DMMC para reducir su tiempo de ejecución.

Como el concepto de compacidad es muy arbitrario y no existe una definición universal o una regla de como hacer compacto un distrito, en algunos estados de EEUU, se especifica que, aparte de que deben estar balanceados con respecto a la población de votantes, los distritos electorales deben ser compactos, pero no existe ninguna medida específica y universal para este concepto, quedando meramente en interpretaciones visuales. Partiendo de esto Kaufman, King, y Komisarchik (2017) crearon un modelo que mide que tan compacto es un distrito que va más allá de lo que el ser humano puede entender por compacidad al solo ver el distrito. Ellos miden la compacidad de manera geométrica tomando únicamente la dispersión de la población para sus cálculos. Por ende logran explicar muy bien su concepto de compacidad intentando dar una explicación del término más allá de ”lo que el ojo ve”pero sin tomar en cuenta conceptos como contigüidad o balanceo de algunas áreas básicas como los condados en el caso de EEUU. Sin embargo, este modelo favorece estados geométricos, islas, sin malformaciones o con bordes suavizados. Este modelo se puede tomar en cuenta para comparar qué tanto difiere este resultado con los modelos que si respeten contigüidad y balanceo, para concluir si la compacidad en verdad se cumple o no.

La Tabla 1, similar a la presentada por Kalcsics y cols. (2005), muestra un resumen de los trabajos anteriores. La primera columna muestra la referencia bibliográfica, la siguiente columna muestra a qué país está asociado el problema de división de un territorio en distritos. Las siguientes columnas muestran los criterios considerados para la división política: contigüidad, compacidad, balanceo y datos políticos.

Referencia	País	Contigüidad	Balanceo	Compacidad	Datos Políticos
Shirabe (2009)	USA	+	-	+	-
Fryer Jr y Holden (2011)	USA	+	-	+	-
Rincón-García y cols. (2017)	México	+	+	+	-
Kaufman y cols. (2017)	USA	-	-	+	-

Tabla 1: División Política

4.2. División comercial o de servicios

A continuación, y al igual que con las aplicaciones de división política, se presenta un resumen de la revisión de la literatura presentada en Kalcsics y cols. (2005) para aplicaciones relacionadas con ventas y/o servicios, en orden cronológico. De acuerdo con Kalcsics y cols. (2005) en estas aplicaciones se consideran criterios organizacionales, como el número de distritos o territorios y la ubicación, fija o variable, de los centros de los territorios (oficinas de representantes de ventas y/o servicios), criterios geográficos como la contigüidad o la accesibilidad y criterios relacionados con las actividades, como balanceo o rendimiento. En todos los trabajos relacionados con la división territorial con propósitos comerciales o de servicio se toma en cuenta la asignación exclusiva de las áreas básicas y la compacidad de los territorios.

- Hess y Samuels (1971) consideran las siguientes características para el diseño de territorios de ventas. Un número fijo de distritos, las localizaciones de los centros de los territorios no están fijas, no se consideran criterios geográficos de contigüidad y accesibilidad y se usan criterios de balanceo de actividades.
- Easingwood (1973) presenta una serie de procedimientos para evaluar distintas configuraciones de división territorial, y ajustar los límites de los territorios para que se ajusten con respecto al criterio de balanceo en la carga de trabajo. En este trabajo el número de centros (representantes de ventas) y su localización están fijos y se requiere que los territorios satisfagan criterios de contigüidad.
- Shanker, Turner, y Zoltners (1975) presentan un método que se basa en la partición de conjuntos, considera un número variable de territorios de venta con localizaciones potenciales predeterminadas y se usan criterios de contigüidad, accesibilidad balanceo y rendimiento.
- Segal y Weinberger (1977) evalúan métodos analíticos y exponen aspectos relacionados con la implementación de un problema de división territorial en el área de los servicios. Concretamente en la reparación o instalación de teléfonos. Utilizan métodos basados en problemas de flujo en redes y enumeración implícita. Consideran un número fijo de territorios con la localización fija de sus centros (oficinas). Además, utilizan criterios de contigüidad y balanceo.
- Glaze y Weinberg (1979) proponen un método donde el objetivo es maximizar la ventas balanceando la carga de trabajo y minimizando el tiempo de transporte para la atención de los clientes. Consideran un número fijo de territorios donde la ubicación de los centros no está fija y criterios de accesibilidad y rendimiento.

- Zoltners (1979) presenta el primer modelo multi-criterio para problemas de división territorial para balancear diferentes atributos de una división territorial. Se considera una suma ponderada de los objetivos y el problema se resuelve como un problema con un solo objetivo. El número de territorios es fijo y la ubicación de los centros de los territorios variable. Se consideran además criterios de contigüidad, accesibilidad, balanceo y rendimiento.
- Marlin (1981) estudia un caso asociado a la prestación de servicios. Considera un procedimiento donde las unidades básicas se asignan a un tour de tal manera que la carga de trabajo asociada a las unidades básica asignadas esté balanceada intentando minimizar el costo total de servir a los clientes de un territorio. Considera un número fijo de territorios donde la ubicación de los centros están fijas y se usa también el criterio de balanceo de la carga e trabajo.
- Ronen (1983) propone un modelo de programación entera y una heurística aplicada a un caso de estudio de un problema de diseño de territorios de venta donde los clientes están muy dispersos dentro del área geográfica que se desea dividir. El tiempo de desplazamiento es una componente importante y se usa un criterio de balanceo con respecto a esta medida. Se considera un número fijo de territorios y la ubicación de sus centros está predefinida.
- Zoltners y Sinha (1983) proponen un modelo general para el problema de diseño de territorios de venta y un método para obtener soluciones del modelo general propuesto. Se utiliza un número fijo de territorios con la ubicación de los centros fija y se consideran también criterios de contigüidad, accesibilidad y balanceo.
- Fleischmann y Paraschis (1988) presentan un caso de estudio de territorios de ventas que se formula como un problema de localización-asignación y se resuelve usando un algoritmo primal de redes acompañado de una heurística que permite dividir áreas. Se considera un número de territorios fijo con la ubicación de sus centros variable y se usan criterios de accesibilidad y balanceo.
- Skiera y Albers (1993) argumenta que muchos enfoques de diseño de territorios de venta no proporcionan soluciones que maximicen el rendimiento y proponen un sistema de soporte a las decisiones para generar una división territorial donde el objetivo principal es maximizar la rentabilidad. Se considera un número fijo de territorios con la ubicación de los centros predefinida y se consideran también criterios de contigüidad y accesibilidad.
- Drexl y Haase (1999) proponen un modelo de programación no lineal para el problema de diseño de territorios de venta y métodos de aproximación a soluciones del problema para resolver problemas de gran escala. En este enfoque el número de territorios es variable y la localización de los centros también. Adicionalmente, se consideran criterios de contigüidad, accesibilidad y rendimiento.
- Blais, Lapierre, y Laporte (2003) presentan un caso de estudio en el área de territorios de servicios médicos y proponen una heurística tabú para la obtención de soluciones factibles del problema. Se considera un número fijo de territorios considerando criterios de contigüidad, accesibilidad y rendimiento.

A continuación se detallan algunos trabajos posteriores a los reportados por Kalcsics y cols. (2005).

En Caballero-Hernández, Ríos-Mercado, López, y Schaeffer (2007) se propone una heurística GRASP (“Greedy Randomized Adaptive Search Procedures”) para resolver un problema de diseño territorial de una empresa embotelladora en Monterrey, México. Se requiere dividir el área geográfica en territorios de venta para que sea más sencilla la administración y distribución de sus productos. En este caso en particular se busca que los distritos estén balanceados con respecto a dos actividades, el número de clientes y el volumen de ventas. Además de considerar criterios de compacidad, buscan que los territorios sean contiguos y respetan el principio de que cada área básica se asigne a un solo distrito. Además, agregan un concepto poco estudiado llamado asignaciones conjuntas en el cual, al agregar dos nodos (A y B) a un mismo distrito, agregaran todos los nodos que estén en el camino entre el nodo A y el nodo B. Por último, el número de distritos en el cual se va a dividir el territorio es fijo y la ubicación de los centros de los territorios variable. Dividen el problema en dos partes, la parte de construcción, en donde encuentran una solución factible y la parte post-procedimiento en donde buscan mejorar la solución obtenida. Los autores concluyen que su solución, además de ser innovadora por incluir la asignación conjunta, proporciona soluciones para instancias de hasta 500 nodos.

En Ríos-Mercado y Fernández (2009) también se enfocan en un problema muy similar al anterior, sobre una embotelladora en Monterrey, México, solo que ellos presentan un modelo basado en un GRASP reactivo con múltiples requisitos de balanceo en lugar de las asignaciones conjuntas. Las medidas de actividad que toman en cuenta son el número de clientes, la demanda y la capacidad o distribución de trabajo. Haciendo estos cambios, los demás criterios de compacidad, contigüidad y balanceo son similares. La heurística de búsqueda local mejora notablemente los resultados obtenidos en la fase constructiva, proporcionando soluciones factibles de buena calidad. Finalmente, el GRASP reactivo, proporciona resultados robustos además que los costos computacionales que ahorra son extraordinarios y consigue resultados factibles 159 de las 160 veces que se probó. Este algoritmo permiten encontrar soluciones mejores que las que la empresa embotelladora tenía en el momento.

En Fernández y cols. (2010) se encontraron con un problema de diseño territorial muy particular; de acuerdo con una ley en Europa las compañías que venden equipo eléctrico o electrónico tienen la obligación de reciclar una parte proporcional a lo que producen. Pero, para evitar que alguna empresa monopolice algún área, las regiones de las cuales cada empresa es responsable deben de estar lo más dispersas posibles y el conjunto de todas esas regiones son los distritos. Esto elimina por completo los conceptos de contigüidad y compacidad que se acostumbran ver en problemas de diseño territorial. También, los distritos no están balanceados ya que se distribuye la obligación de reciclaje de acuerdo a la capacidad de ventas de cada empresa. Si se intenta balancear la cantidad de ”$buenos$” o ”$malos$” distritos que le tocan a cada empresa, un distrito es bueno o malo de acuerdo a que tan accesible es la extensión de terreno que posea. Además, se consideran dos tipos de desperdicios diferente de los cuales cada empresa se tiene que hacer responsable y en ocasiones una misma región puede ser asignada a dos distritos y un distrito recibe un tipo de desperdicio y el otro el que queda. Por último, el número de regiones y de empresas ya está preestablecido. Ellos mismos califican su modelo de programación matemática como débil, por eso implementaron un GRASP con el cual lograron obtener resultados satisfactorios sin demasiado esfuerzo computacional.

Además de las posibles mejoras a este modelo, un reto para el futuro sería combinar este problema con el problema de recolección de los desperdicios.

Elizondo-Amaya, Ríos-Mercado, y Díaz (2014) consideran un esquema de relajación Lagrangeana para obtener cotas duales y primales del problema. En este trabajo se toman en cuenta la contigüidad y compacidad en los distritos, así como el balanceo de dos medidas de actividad. El esquema de relajación Lagrangeana permite encontrar una cota inferior y superior para la solución reduciendo el número de radios (distancia máximas entre una unidad básica y el centro del territorio al que está asignado) que se deben evaluar. Esto reduce de manera significativa el tiempo computacional que se requiere para obtener las cotas. A partir de ahí se puede usar un esquema de ramificación que puede arrojar la solución óptima o usar alguna otra heurística que proporcione una solución factible de buena calidad con poco esfuerzo computacional.

También, se han considerado factores para la reducción de costos para mover la mercancía, de gasolina o el tiempo de desplazamiento de los empleados dentro del territorio. Es por esto que Ahuja, Bender, Sanders, Schulz, y Wagner (2015) propone un modelo considerando las redes de carreteras en cada distrito. Esto lo hacen por medio de un modelos de grafos que incorpora la red de transporte subyacente. Lo anterior, aparte de lograr accesibilidad en los distritos, busca que la empresa reduzca costos y optimice el alcance de sus ventas. La medida de balanceo va enfocada a un índice de actividad de los clientes, los distritos son compactos, contiguos y el número de territorios está predeterminado.

Finalmente, en Moreno, Pereira, y Yushimito (2017) se busca minimizar los costos solamente que esta vez el número de distritos varía. Se implementa un modelo híbrido de K-centros que se usa para elegir los territorios para después con las soluciones de un modelo de programación entera satisfacer todas las restricciones. También es importante mencionar que un esquema voraz toma parte para la elección de los distritos lo cual hace mucho más eficiente el procedimiento. En este contexto, la contigüidad y compacidad son fundamentales así como la demanda como única medida de balanceo. Se concluye que este modelo reduce aproximadamente un 24 % el número de zonas de distribución. Los autores buscarán incorporar, como trabajo futuro redes de carreteras subyacentes, como en Ahuja y cols. (2015), para complementar su trabajo.

A continuación, la Tabla 2 muestra una tabla similar a la presentada en Kalcsics y cols. (2005), que resume las características de algunos trabajos posteriores a los presentados en su revisión de la literatura. La primera columna presenta la referencia bibliográfica, la siguiente columna, el tipo de aplicación (ventas o servicios), la siguientes dos columnas muestran si el número de distritos a considerar y las ubicaciones de sus centros son fijas o variables (en la tabla, “f” denota fijo y “v” variable). La siguientes columnas muestran los criterios utilizados en la partición del territorio: compacidad, contigüidad, accesibilidad, balanceo y rendimiento.

4.3. Otras aplicaciones

Finalmente, es importante detallar algunos documentos que no encajan del todo en las dos grandes clases anteriores pero consideran aplicaciones de división territorial.

Existen algunos casos donde los problemas de diseño territorial se encuentran fuera de la política o el comercio, un ejemplo de esto se encuentra en Carvajal, Constantino,

Referencias	Applic	Organización		Geográficos			Actividad	
		#D	Loc.	Comp.	Contig.	Acces.	Bal.	Rend
Caballero-Hernández y cols. (2007)	Ventas	f	v	+	+	-	mult	-
Ríos-Mercado y Fernández (2009)	Ventas	f	f	+	+	-	mult	-
Fernández y cols. (2010)	Servicios	f	f	-	-	+	-	-
Salazar-Aguilar y cols. (2011)	Ventas	f	v	+	+	-	mult	-
Elizondo-Amaya y cols. (2014)	Ventas	f	f	+	+	-	mult	-
(Ahuja y cols., 2015)	Vent/Serv	f	f	+	+	+	+	+
(Moreno y cols., 2017)	Vent/Serv	v	v	+	+	-	+	+

Tabla 2: División comercial o de servicios

Goycoolea, Vielma, y Weintraub (2013) que lo emplean para la correcta planificación forestal. Ellos explican que existen tres prácticas importantes en la cuales el diseño territorial marca diferencia: 1) elegir un área máxima de deforestación sin causar erosión o daños estéticos a los bosques, 2) la conservación de áreas de bosques maduros que ayudan a la preservación de la fauna y la biodiversidad con base en que, se ha demostrado, que el impacto de estas áreas es aún mayor si existe contigüidad y 3) la correcta selección de áreas naturales protegidas para garantizar la seguridad de animales en peligro de extinción. En grandes territorios forestales, más de una de estas prácticas se pueden observar y no solo es buscar dividirlas, sino que las áreas sean accesibles y cumplan con algunas medidas de actividad como serían la capacidad de los trabajadores o las áreas máximas contiguas que se pueden cortar. En el trabajo de Carvajal y cols. (2013) proponen un modelo de programación entera para un problema que involucra el área máxima de deforestación como medida de balanceo y la contigüidad del área de bosques maduros, capaz de resolver problemas forestales de tamaño medio. Concluyen que las relajaciones lineales que emplearon son buenas para conseguir soluciones con desviaciones pequeñas con respecto a las soluciones óptimas, en un tiempo razonable, concluyendo que en cuatro horas pueden encontrar soluciones factibles y de buena calidad.

En Hu, Yang, y Xu (2014) se busca explicar mediante un modelo matemático, los lugares en los cuales se deben ubicar los refugios después de que ocurra un terremoto. Estos deben ser accesibles, la población debe saber a qué refugio deben acudir en caso de un siniestro y los costos de trayecto deben de ser mínimos. Por esto se deben satisfacer la contigüidad y las restricciones de capacidad como medida de balanceo.

En Camacho-Collados, Liberatore, y Angulo (2015) se estudia el problema de diseño territorial policiaco. Este es un problema en el cual muchos factores se deben de tomar en cuanta a la hora de modelar. Estos factores van desde la capacidad de respuesta y la eficiencia en el servicio. En el artículo en cuestión son los primeros en tomar en cuenta múltiples medidas como los atributos del área, riesgo, compacidad y refuerzos en caso de necesitarlos. Se implementa una heurística de búsqueda local para resolver el problema y se aplica en Madrid, España, comparando los resultados con las medidas que la policía española usa actualmente. Se logró probar que el modelo proporciona soluciones mejores que las producidas por la policía, pero considera que se puede profundizar más en la recopilación de los datos para las medidas y en uso de modelos más complicados que sean aún más eficientes.

5. Metodología

En esta sección se describe el problema de diseño territorial estudiado en este trabajo, se muestra un modelo de programación matemática para el mismo, y se describe con detalle el método heurístico propuesto para encontrar soluciones factibles del problema.

El problema de diseño territorial propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011) es el mismo que se estudia en este trabajo, pero desde una perspectiva diferente. En el trabajo de Salazar-Aguilar y cols. (2011), se proponen dos medidas de dispersión, que al utilizarse como función objetivo, producen territorios que satisfacen el criterio de compacidad. Asimismo, se proponen algoritmos exactos de solución para ambas formulaciones del problema. En este trabajo, se propone un método heurístico para la obtención de soluciones factibles del problema de diseño territorial propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011), usando un objetivo del tipo *minisum* para la obtención de territorios compactos. Esta medida es la misma que se utiliza en el problema de la p-mediana en el ámbito de la localización de instalaciones.

A continuación se describe el problema y se presenta el modelo de programación matemática propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011). Como ya se ha mencionado anteriormente, en los problemas de diseño territorial, se requiere dividir un área geográfica en distritos o territorios que satisfagan ciertos criterios de planificación preestablecidos y que dependen de cada caso particular. Este tipo de problemas es muy frecuente en aplicaciones donde se desea dividir una zona geográfica en distritos electorales o en territorios comerciales o de servicios. El problema de diseño territorial propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011) considera la siguiente situación: Se requiere encontrar una partición de un conjunto de Unidades Básicas UB's, en p subconjuntos, a los que denominaremos territorios, satisfaciendo restricciones de contigüidad, compacidad y balanceo con respecto a una o más actividades. En este trabajo se proponen distintas formulaciones para el problema y se consideran diferentes alternativas para satisfacer el criterio de compacidad. Se utilizan dos criterios distintos para la compacidad. Uno de ellos considera una función objetivo del tipo *minisum* (equivalente al objetivo de los problemas de localización tipo p-mediana) y el otro una función objetivo del tipo *minimax* (equivalente al objetivo de los problemas de localización tipo p-centro). En el primer caso, se utiliza como objetivo la suma total de las distancias entre cada UB y la mediana del territorio al que están asignados (función objetivo del problema p-mediana), mientras que en el segundo caso, se minimiza la máxima distancia entre una UB y el centro del territorio al que está asignada (función objetivo del problema p-centro). Se consideran, en ambos casos, una formulación con una función objetivo lineal y una formulación con una función objetivo cuadrática. De acuerdo con los autores de este trabajo, es el primer trabajo donde se proponen métodos exactos para su resolución. Como se mencionó anteriormente, el objetivo del presente trabajo es el desarrollo de un método heurístico para encontrar soluciones factibles del problema con un esfuerzo computacional razonable, cuando se usa el objetivo tipo p-mediana. A continuación, se presenta la formulación lineal del problema propuesta por Salazar-Aguilar y cols. (2011) para el caso donde el objetivo es la suma de las distancias entre cada unidad básica y la mediana a la que están asignados.

Sea $G = (V, E)$ un grafo donde V es el conjunto de nodos y E el conjunto de aristas que están asociadas a unidades básicas adyacentes. A cada nodo $i \in V$ se le asignan dos medidas de actividad; la primera es el número de clientes y la segunda el volumen de ventas. Como medida de distancia entre pares de unidades básicas, se utiliza la distancia euclidiana d_{ij} entre cada para de nodos $i, j \in V$. Se busca dividir el conjunto V en p distritos o territorios y cada unidad básica $i \in V$ debe pertenecer a un solo distrito o territorio. Para que una solución sea válida, se requiere que los territorios estén balanceados con respecto al número de clientes y la demanda y que además cada territorio esté compuesto por una sola componente conexa (para que los territorios sean contiguos). El criterio de compacidad está asociado a la función objetivo.

A continuación se introduce notación adicional para el modelo que se propone en Salazar-Aguilar y cols. (2011). Para cada UB, sea w_i^a el nivel de la actividad a en el nodo i, por tanto, el *tamaño* del distrito $V_k \subset V$, con respecto a la actividad a se puede obtener con la siguiente expresión,

$$w^{(a)}(V_k) = \sum_{i \in V_k} w_i^{(a)},$$

donde k denota el índice del distrito. En muchos casos es prácticamente imposible que con las restricciones de asignación única (recordar que se desea encontrar una partición de V en territorios), los distritos sean exactamente del mismo tamaño, con respecto a cada una de las actividades consideradas. El criterio de balanceo de cada actividad en un territorio se obtiene especificando un rango de valores del nivel de actividad de la siguiente manera: Se introduce un parámetro $\tau^{(a)}$ que define el nivel de tolerancia que se permite para balancear los distritos dentro de un rango aceptable. Esa medida de tolerancia es una desviación relativa respecto al valor promedio $\mu^{(a)}$ de cada actividad,

$$\mu^{(a)} = w^{(a)}(V)/p.$$

Generalmente los valores para $\tau^{(a)}$ son valores pequeños como 0.05 o 0.10 para desviaciones con respecto al valor medio de cada actividad de entre 5 % o 10 %, respectivamente. Valores muy cercanos a cero para este parámetro, pueden provocar la infactibilidad del problema.

Para la contigüidad se necesita asegurar que $\forall i, j \in V_k$ exista un camino P_{ij} entre los nodos i y j en G de tal manera que todas las aristas del camino estén contenidas en el territorio V_K, es decir, $G_k = (V_k, E_k)$ es un grafo conexo donde V_k son los nodos del territorio k y $E_k = \{\{i, j\} \in E : i, j \in V_k\}$ es el conjunto de todas las aristas que tienen ambos extremos en nodos del conjunto V_k.

A continuación se presenta el modelo matemático del problema propuesto en Salazar-Aguilar y cols. (2011). Este es el modelo del problema de diseño territorial que utiliza como función objetivo la suma de las distancias entre cada unidad básica y la mediana a la que están asignadas. Sea $N^i, i \in V$, el conjunto de nodos adyacentes al nodo i donde, $N^i = \{j \in V : \{i, j\} \in E \vee \{j, i\} \in E\}$. Se consideran las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si el nodo } j \text{ se asigna al territorio } i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad , \forall i, j \in V.$$

Es importante observar que $x_{ii} = 1$ implica que i es la mediana del i-ésimo territorio.

El problema se puede formular como un problema de programación lineal entera de la siguiente manera.

$$(PDT) \quad \min \quad z = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ii} = p \tag{2}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \tag{3}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^{(a)} x_{ij} \geq \left(1 - \tau^{(a)}\right) \mu^{(a)} x_{ii} \qquad i \in V; a \in A \tag{4}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^{(a)} x_{ij} \leq \left(1 + \tau^{(a)}\right) \mu^{(a)} x_{ii} \qquad i \in V; a \in A \tag{5}$$

$$\sum_{j \in \bigcup_{v \in S} (N^v \setminus S)} x_{ij} - \sum_{j \in S} x_{ij} \geq 1 - |S| \qquad i \in V; S \subset [V \setminus (N^i \cup \{i\}] \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i, j \in V \tag{7}$$

El objetivo (1) consiste en minimizar la medida de dispersión (suma de las distancias entre cada UB y la mediana del territorio al que están asignadas). La restricción (2) garantiza que se genere un número fijo, p, de territorios. Las restricciones (3) aseguran que cada unidad básica se asigne a una sola mediana y las restricciones (4) y (5) aseguran que los territorios estén balanceados con respecto a cada una de las medidas de activad. A su vez, la restricción (6) garantiza que los territorios cumplan con el criterio de contigüidad, es decir, si se toma un subconjunto de nodos (unidades básicas) B asignados a i que no contiene a i, debería existir un camino entre el conjunto que si contiene a i y el subconjunto de nodos B. Para terminar, en (7) aseguramos que x_{ij} sea binario, determinando si se toma en cuenta la distancia d_{ij} en la función objetivo o no.

A continuación se describe el método heurístico propuesto para resolver el problema de diseño territorial. La estrategia de solución consiste en evaluar asignaciones factibles de unidades básicas a territorios, resolviendo el siguiente subproblema de asignación para un subconjunto M fijo de p medianas.

$$(ASIG(M)) \quad \min \quad z = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \tag{8}$$

s. a.

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \qquad j \in V \tag{9}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^{(a)} x_{ij} \geq \left(1 - \tau^{(a)}\right) \mu^{(a)} \qquad i \in M, a \in A \tag{10}$$

$$\sum_{j \in V} w_j^{(a)} x_{ij} \leq \left(1 + \tau^{(a)}\right) \mu^{(a)} \qquad i \in M, a \in A \tag{11}$$

$$\sum_{j \in \bigcup_{v \in S} (N^v \setminus S)} x_{ij} - \sum_{j \in S} x_{ij} \leq 1 - |S| \qquad i \in M; S \subset \left[V \setminus \left(N^i \cup \{i\}\right)\right] \tag{12}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i \in M, j \in V \tag{13}$$

Como se puede observar en la formulación anterior, el problema $(ASIG(M)$ es similar al problema (PDT), solo que en el caso del problema de asignación se considera un conjunto fijo de p medianas, mientras que en el problema de diseño territorial las p medianas de los territorios deben ser determinadas por el modelo, lo cual añade más complejidad, ya que hay un número combinatorio de opciones en las que p unidades básicas pueden ser seleccionas como medianas, del conjunto de n unidades básicas. Dado que en la formulación de problema de asignación hay un número exponencial de restricciones de conectividad (12), estas restricciones se dejan como "lazy-constraints" y las que estén violadas se añaden a partir de soluciones enteras del problema. Al problema de asignación, donde se relajan algunas o todas las restricciones de conectividad (12), lo denominaremos $ASIG_{Rel}(M)$.

El Algoritmo 1 muestra el pseudocódigo del procedimiento heurístico propuesto el cual es un procedimiento iterativo que consiste en los siguientes pasos:

- **Paso 1**. *Selección de un conjunto inicial de medianas*: Seleccionar un conjunto de p unidades básicas que serán las medianas de cada uno de los p territorios.
- **Paso 2**. *Asignación de unidades básicas a los territorios*: Asignar cada una de las unidades básicas a alguna de las medianas seleccionadas en el paso 1, de manera tal que se minimice la suma de distancias entre cada unidad básica y la mediana a la que están asignadas y se satisfagan las restricciones de balanceo.
- **Paso 3**. *Ajuste de las medianas de los territorios*: Para cada uno de los p territorios, se evalúa si se puede mejorar el valor de la función objetivo reemplazando su mediana por otra de las unidades básicas del territorio. Si una o más de las medianas de los territorios fueron reemplazadas, se vuelve a ejecutar el paso 2, para determinar la asignación óptima de las unidades

básicas a las medianas de los territorios. En caso contrario, se ejecuta el paso 4.

- **Paso 4**. *Asegurar territorios conexos*: Si el valor de la función objetivo del problema de asignación, obtenido en el paso 2, es mejor, que el valor de la mejor solución obtenida en iteraciones previas del algoritmo, se ejecuta el siguiente procedimiento iterativo para añadir todas las restricciones de conectividad qué estén violadas (si es el caso) en la solución óptima del problema de asignación. En cada iteración se hace lo siguiente: Se resuelve el problema de separación, que consiste en determinar si en la solución óptima del problema de asignación hay alguna restricción de conectividad violada. Si es el caso, se añaden todas las restricciones de conectividad que estén violadas a la formulación del problema de asignación y se resuelve con las restricciones añadidas. En caso contrario, se ejecuta el paso 5.
- **Paso 5**. *Evaluar criterio de terminación*: Si aún no se alcanza el número de iteraciones, ir al paso 1. De lo contrario, terminar.

El procedimiento iterativo se ejecuta un número fijo de iteraciones. En este caso, y después de una fase previa de ajuste, se determinó un número fijo de iteraciones igual a $\lceil \frac{n}{4} \rceil$

A continuación se describen con mayor detalle los pasos 1 a 4 del algoritmo propuesto en este trabajo. En el algoritmo propuesto, las soluciones se representan mediante un par (M, a), donde M es el conjunto de la p medianas de los territorios y $a : V \longrightarrow M$ es una aplicación tal que $a(j) = m$, si el nodo o unidad básica j está asignado a la mediana $m \in M$.

Algoritmo 1 Pseudocódigo del algoritmo heurístico propuesto

$Mejor \leftarrow \infty$
$MaxIter \leftarrow \lceil \frac{n}{4} \rceil$
$iter \leftarrow 0$
$R \leftarrow \emptyset$
while ($iter \leq MaxIter$) **do**
  $M \leftarrow \emptyset$
  Seleccionar una mediana r aleatoriamente del conjunto $V \setminus R$
  $R \leftarrow R \cup \{r\}$
  while ($|M| < p$) **do**
    $DistMin_j \leftarrow min_{m \in M}\{d_{mj}\}, \forall j \in V \setminus M$
    $m^\star \in \arg\max_{j \in V \setminus M}\{DistMin_j\}$
    $M \leftarrow M \cup \{m^\star\}$
  end while
  repeat
    Resolver el problema de asignación $ASIG_{Rel}(M)$
    for all ($j \in V : x_{mj} = 1$ en la sol. óptima de $ASIG_{Rel}(M)$) **do**
      $a(j) \leftarrow m$
    end for
    $M' \leftarrow$ AJUSTARMEDIANAS((M))
    if ($M' \neq M$) **then**
      $M \leftarrow M'$
    end if
  until ($M' = M$)
  $ValorSol \leftarrow \sum_{j \in V} d_{a(j),j}$
  if ($ValorSol < Mejor$) **then**
    repeat
      $CA \leftarrow$ SUBCONJUNTOSCONECTIVIDADVIOLADOS(M, a)
      if ($CA \neq \emptyset$) **then**
        for all ($c \in CA$) **do**
          Añadir la restricción de conectividad
          asociada al conjunto c en $ASIG_{Rel}(M)$
        end for
        Resolver problema de asignación $ASIG_{Rel}(M)$
      end if
    until ($CA = \emptyset$)
  end if
  $iter \leftarrow iter + 1$
end while

5.1. Paso 1. *Selección de un conjunto inicial de medianas*

Como se mencionó anteriormente, el propósito de este paso del método propuesto es seleccionar un conjunto de medianas M, con cardinalidad p, que es el número de territorios en los que se desea dividir el área geográfica. Para seleccionar este conjunto se hace lo siguiente. La primera mediana se selecciona de manera aleatoria. Cabe mencionar que este es el único factor aleatorio (la selección de la primera mediana) que contiene el método propuesto, por lo que en cualquier iteración del algoritmo, no tiene caso elegir como mediana alguna unidad básica que haya sido elegida como primera mediana en alguna iteración anterior, dado que se elegiría el mismo conjunto de medianas al seleccionado en alguna iteración anterior, porque el procedimiento que se utiliza para elegir las $p-1$ medianas restantes es determinista. Es por esto que el procedimiento registra las unidades básicas seleccionadas aleatoriamente en cada una de las iteraciones, para que en iteraciones posteriores no se toman en cuenta como medianas candidato a ser seleccionadas aleatoriamente como primera mediana. Para elegir el resto de medianas de los territorios, se busca que la siguiente mediana este lo más alejada posible a alguna de las medianas seleccionadas previamente. Es decir, elegiremos la unidad básica cuya distancia más corta a alguna de las medianas ya seleccionadas, sea la más grande posible. Para elegir las medianas restantes se ejecuta el siguiente procedimiento iterativo. Sea M el subconjunto de medianas. Mientras $|M| < p$, se hace lo siguiente. Para cada unidad básica candidato, $j \in V \setminus M$,

$$DistMin_j = \min_{m \in M} \{d_{mj}\}$$

denota la distancia más pequeña entre la unidad básica j y las medianas previamente seleccionadas. Entonces, como se desea que la siguiente mediana a seleccionar esté lo más alejada posible de las medianas previamente seleccionada, se escoge como mediana alguna de las que esté más alejada de las mediana previamente seleccionas, es decir, $m \in \arg\max_{j \in V \setminus M}\{DistMin_j\}$. En caso de empates, se escoge como mediana la de menor índice. Este proceso se repite hasta que $|M| = p$. Para ilustrar este concepto véase la Figura 1 en donde se muestra una instancia con 35 UB's y $p = 4$. Las medianas elegidas en cada iteración se muestran en color rojo y el camino mínimo entre las medianas seleccionadas previamente (suponiendo distancias de red) y la mediana candidato a ser añadida se muestran con color amarillo. Aquí se muestran las $p = 4$ iteraciones del método. En la iteración 1, se selecciona aleatoriamente una mediana y las restantes se escogen utilizando el criterio descrito con anterioridad.

El concepto detrás de esta idea es evitar que las medianas estén muy cercanas entre sí. Si esto ocurriera, es muy probable que se requieran distancias grandes para asignar las unidades básica a las medianas seleccionadas, lo cual probablemente provocaría que fueran necesarias muchas iteraciones en el paso de ajuste de medianas aumentando el costo computacional.

5.2. Paso 2. *Asignación de unidades básicas a los territorios*

Como se mencionó anteriormente, el paso 2 del método propuesto consiste en determinar la asignación de las unidades básicas a los territorios. Este problema de asignación

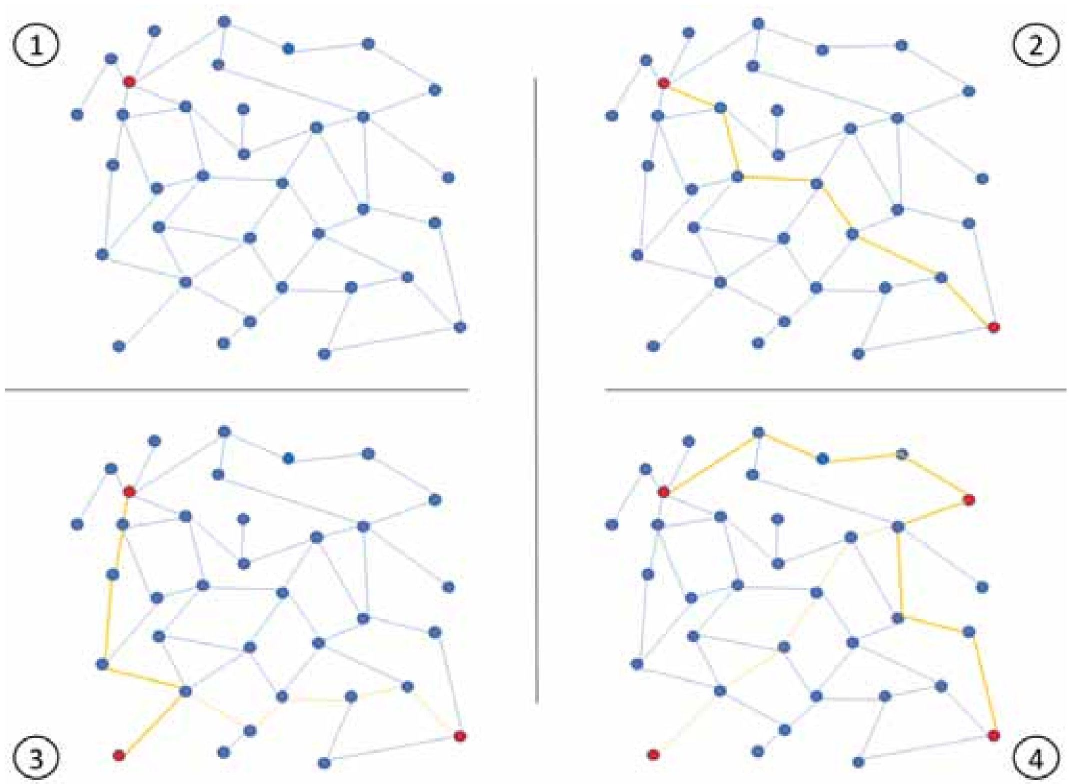

Figura 1: Paso 1

es un problema NP-duro (si $|A| = 1$, y se relajan las restricciones (4), el problema se reduce a un Problema de Asignación Generalizada (GAP por sus siglas en inglés), que se sabe que es NP-duro, ver por ejemplo Fisher, Jaikumar, y Van Wassenhove (1986)). En este paso se resuelve el problema $ASIG_{Rel}(M)$ para encontrar la asignación óptima de unidades básicas al conjunto de medianas, M, seleccionadas en el paso 1. El problema de asignación $ASIG_{Rel}(M)$ considera las restricciones de balanceo para garantizar que este criterio, usado en la división territorial, se satisfaga. Si tomamos el ejemplo anterior de 35 unidades básicas y lo queremos dividir en 4 territorios, y si además asumimos que todos las UB's tienen el mismo nivel de actividad, para cada $a \in A$, cada territorio debería contener 8.75 UB's para estar perfectamente balanceados. Dada la naturaleza de este problema, es imposible dividir las UB's en fracciones por lo que se da una tolerancia para cada actividad, $\tau^{(a)}, a \in A$, para que sea factible y menos complicado balancear los distritos. Si para este caso en particular elegimos un $\tau^{(a)} = 15\,\%, a \in A$ entonces cada territorio podrá tener de 8 a 10 UB's y considerarse balanceados. Lo que se busca es asignar cada una de las UB's a las medianas elegidas en el paso 1, que minimice la medida de dispersión de los distritos, es decir, que sean lo más compactos posibles. A continuación, en la Figura 2 se muestra la asignación óptima para el caso donde las medianas están muy cercanas entre si (izquierda) y para el caso cuando las medianas se elijen siguiendo la heurística propuesta en esta tesis (derecha). Los territorios son las sombras naranjas y verdes, respectivamente, que envuelven a las unidades básicas. Como se puede observar la solución de la derecha proporciona una solución que explica el concepto de compacidad de una mejor manera que la solución de la izquierda.

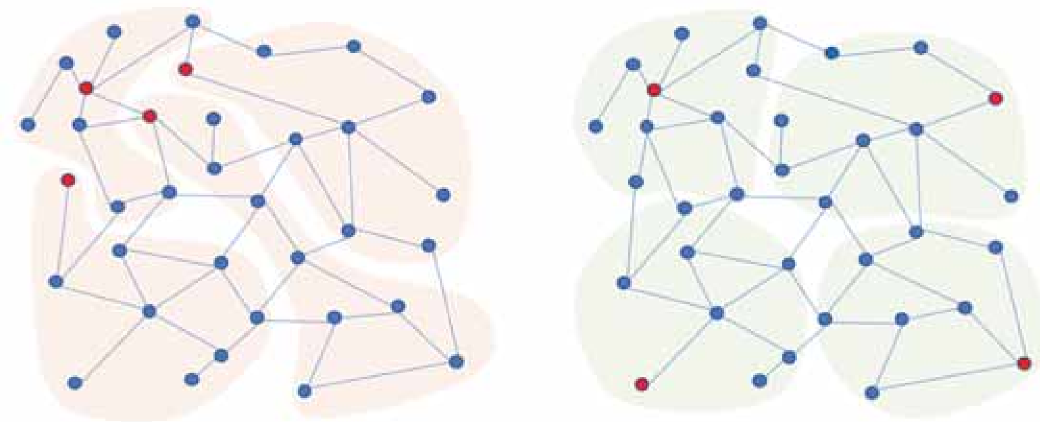

Figura 2: Paso 2

5.3. Paso 3. *Ajuste de medianas de los territorios*

Una vez elegidos los territorios, en el Paso 3 se busca ajustar el conjunto de medianas de los territorios. Dado que al resolver el problema de asignación, se obtienen territorios que satisfacen las restricciones de balanceo, se busca obtener la mejor mediana para cada territorio. Es decir, sean $T_1, T_2, \ldots, T_p$, los territorios obtenidos en la solución óptima del problema de asignación (paso 2), asociados al conjunto de medianas M y sean $m_1, m_2, \ldots, m_p \in M$ las medianas de los territorios $T_1, T_2, \ldots, T_p$, respectivamente. Entonces, $T_k = \{j \in V : x_{m_k j} = 1\}$, es el conjunto de UB's asignadas al territorio T_k. Asimismo, sea $SumaDist_i = \sum_{j \in T_k} d_{ij}$ pata todo $i \in T_k$. Si $\min_{i \in T_k}\{SumaDist_i\} < \sum_{j \in T_k} d_{m_k j}$ entonces, existe alguna otra unidad básica en el territorio T_i, para la que se minimizan la suma de distancias con respecto al resto de unidades básicas del territorio, y por lo tanto, si se reemplaza esa unidad básica con la unidad básica m_k en el conjunto M, se mejora el valor de la función objetivo. En ese caso, la unidad $i^\star \in T_k$ tal que $i^\star \in \arg\min_{j \in T_k}\{SumaDist_i\}$ reemplaza a la mediana m_k del territorio k haciendo $M \leftarrow M \setminus \{m_k\} \cup \{i^\star\}$. Obviamente, si existe algún cambio en el conjunto de medianas, la asignación de unidades básicas a territorios puede ya no ser óptima y es necesario volver al paso 2, es decir, resolver el problema $ASIG_{Rel}(M)$. Esta situación se ilustra en la Figura 3. El conjunto de medianas inicial (nodos coloreados en rojo) en la parte izquierda de la figura se cambia por el conjunto de medianas (nodos coloreados en verde) en la parte derecha de la figura.

Si durante la fase de ajuste se tienen que $m_k = \arg\min_{j \in T_k}\{SumaDist_j\}$ para todo k, se tiene el mejor conjunto de medianas para los territorios y solo resta verificar si los territorios satisfacen el criterio de contigüidad. El Algoritmo 3 muestra el pseudocódigo del paso 2 del algoritmo.

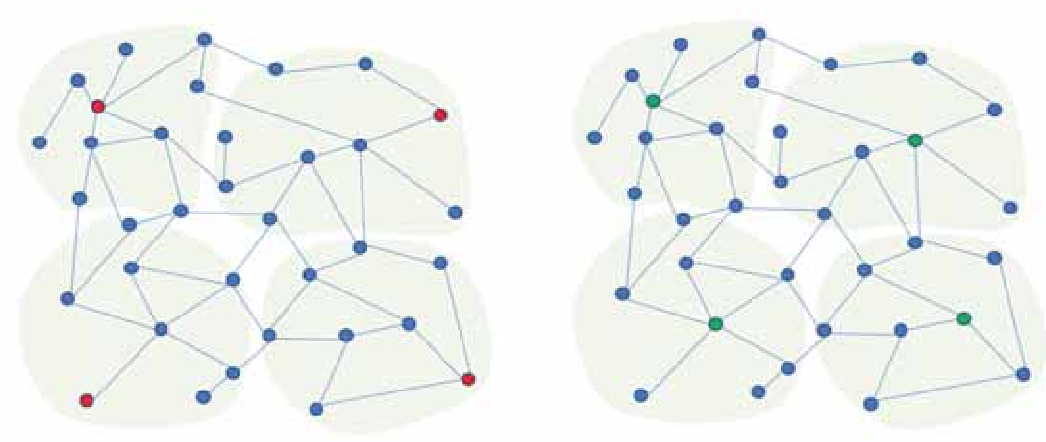

Figura 3: Paso 3

Algoritmo 2 Pseudocódigo del algoritmo para ajustar las medianas de cada territorio

---

function AJUSTARMEDIANAS(M)
  $M' = M$
  for all $(m \in M)$ **do**
    $T_m \leftarrow \emptyset$
    for all $(j \in V : a(j) = m)$ **do**
      $T_m \leftarrow T_m \cup \{j\}$
    end for
    for all $(i \in T_m)$ **do**
      $SumaDist_j \leftarrow \sum_{j \in T_m} d_{ij}$
    end for
    $j^{\star} \leftarrow \arg\min_{j \in T_m}\{SumaDist_j\}$
    if $(j^{\star} \neq m)$ **then**
      $M' := M' \setminus \{m\} \cup \{j^{\star}\}$
    end if
  end for
end function

5.4. Paso 4. *Asegurar territorios conexos*

En este paso del algoritmo propuesto se verifica que los territorios satisfagan las restricciones de conectividad. Este paso solo se ejecuta cuando en alguna iteración del algoritmo, existe la posibilidad de encontrar alguna solución cuyo valor objetivo sea más pequeño que el de la mejor solución encontrada en iteraciones previas. Lo anterior evita consumir esfuerzo computacional cuando de antemano se sabe que el mejor conjunto de medianas obtenido en esa iteración, después de ejecutar los pasos 1 a 3, no puede mejor el valor de la función objetivo, es decir, si para el conjunto de medianas $M, \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \in T_k} d_{m_k j}$ es mayor al valor de la mejor solución conocida hasta esa iteración.

Como se ha mencionado anteriormente, que un territorio sea contiguo significa que en cualquier territorio existe un camino entre cualquiera de sus unidades básicas, las aristas del camino son elementos del conjunto de aristas E, y todas las aristas del camino tienen sus dos extremos en nodo que pertenecen al territorio. Es decir, existe un camino que conecta cualquier par de nodos (unidades básicas) del territorio sin necesidad de salir de él. En la Figura 4 se muestra un ejemplo con una instancia de ocho unidades básicas y dos territorios. Ambas imágenes muestran una solución balanceada y compacta del problema cuyas medianas son las unidades básicas 3 y 6 (coloreadas de color verde), pero en la imagen de la izquierda el distrito que contiene las unidades básicas $\{$ 4,6,7,8$\}$ no es contiguo, ya que el nodo 4 está desconectado del resto de los nodos del territorio. La condición para que se satisfaga el criterio de contigüidad es que cada territorio esté compuesto por una sola componente conexa.

El pseudocódigo para verificar subconjuntos de nodos para los que las restricciones de conectividad (12) están violados se muestra en el Algoritmo 2 y, el Algoritmo 4 muestra el pseudocódigo para obtener todas las componentes conexas de un territorio.

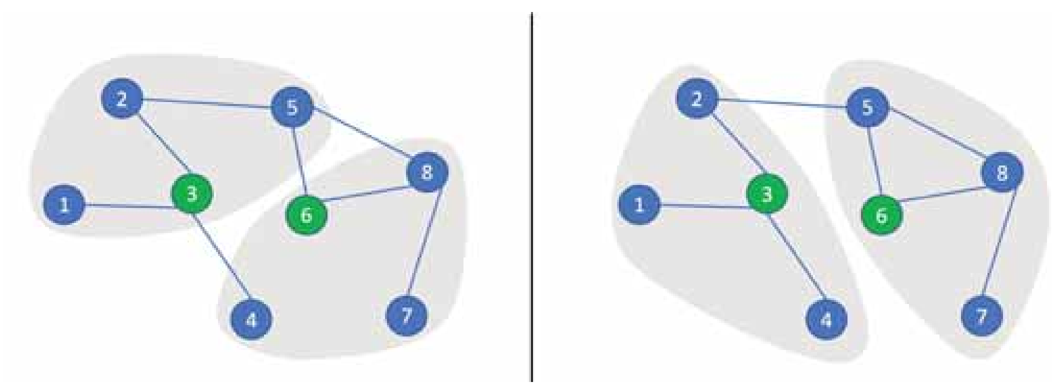

Figura 4: Paso 4

Algoritmo 3 Pseudocódigo del procedimiento de identificación de restricciones de conectividad violadas

```
function SubconjuntosConectividadViolados(M, a)
    CA ← ∅
    for all (m ∈ M) do
        T_m ← ∅
        for all (j ∈ V : a(j) = m) do
            T_m ← T_m ∪ {j}
            CC ← CompenentesConexas(m, T_m)
            for all (c ∈ CC) do
                if (m ∉ c) then
                    CA ← CA ∪ {c}
                end if
            end for
        end for
    end for
    return CA
end function
```

Algoritmo 4 Pseudocódigo para obtener las componentes conexas de un cluster

```
function ComponentesConexas(m, T_m)
    CC ← ∅
    for all (u ∈ T_m) do
        visitado(u) ← false
    end for
    componentes ← 0
    for all (u ∈ T_m) do
        if (not visitado(u)) then
            CompConex ← ∅
            L ← ∅
            componentes ← componentes + 1
            Agregar el nodo u al final de la lista L
            visitado(u) ← true
            while (L no vacía) do
                Remover el primer elemento, l, de la lista L
                CompConex ← {l}
                for all (v ∈ N^u : v ∈ T_m) do
                    if (not visitado(v)) then
                        Agregar el nodo u al final de la lista L
                        visitado ← true
                    end if
                end for
            end while
            CC ← CC ∪ {CompConex}
        end if
    end for
    return CC
end function
```

6. Resultados y Discusión

En esta sección comparamos los resultados obtenidos con el método heurístico propuesto en este trabajo con los resultados del método exacto propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011). Ambos métodos se implementaron en FICO Xpress Optimization Suite® y se ejecutaron en una computadora con un procesador intel(R) Xeon(R) E-2176M CPU @ 2.70 GHz y 32 GB de memoria RAM.

Se hicieron pruebas con 80 instancias diferentes del problema. El conjunto de instancias utilizadas contiene:

- 20 instancias de 60 nodos con $p = 4$.
- 20 instancias de 80 nodos con $p = 5$.
- 20 instancias de 100 nodos con $p = 6$.
- 10 instancias de 150 nodos con $p = 8$.
- 10 instancias de 200 nodos con $p = 11$

Para todas las instancias se toman en cuentan dos medidas de actividad y se considera un valor de desviación relativa con respecto al promedio de actividad de 5 % para balancear los distritos. Es decir, $|A| = 2$ y $\tau^{(a)} = 0{,}05$ para $a \in A$. También, es importante mencionar que para cada una de las instancias de prueba, el método propuesto se ejecutó diez veces, ya que tiene elementos aleatorios. Los resultados obtenidos con el método propuesto se comparan con los resultado proporcionados por el método exacto propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011). Es evidente que en términos del esfuerzo computacional requerido, el método exacto se compara desfavorablemente con el heurístico propuesto. Los resultados del método heurístico se comparan con los del método exacto con dos propósitos:

1. Verificar la calidad de las soluciones obtenidas con el método propuesto.
2. Verificar el esfuerzo computacional requerido para resolver el problema con el método exacto para evaluar si el método propuesto es eficiente.

Los resultados obtenidos, tanto con el método de solución exacto como con el método heurístico propuesto en este trabajo para todas las instancias de prueba, se muestran en las Tablas 3 a 7. Todas la tablas muestran las siguientes columnas de información: La primera columna muestra el nombre de la instancia. Las columnas 2 y 3 (con los encabezados “Opt” y “Opt CPU”) muestran el valor de la solución óptima de cada instancia del problema y el tiempo computacional (en segundos) requerido. Los valores numéricos de la columna 2, que se muestran remarcados con negritas, indican las instancias de prueba del problema en las que el método heurístico encontró una solución óptima, en al menos una de las diez ejecuciones. En la columna 4 (con el encabezado “Veces Opt”), se muestra el número de ejecuciones en las que el método heurístico llegó a la solución óptima. Las siguientes tres columnas (con los encabezados “Sol min”, “Sol prom” y “Sol Max”) muestran el valor de la mejor solución encontrada, el promedio de los valores de las soluciones obtenidas y el valor de la peor solución encontrada, respectivamente, en las diez ejecuciones del algoritmo. Las siguientes tres columnas (con los encabezado “Desv Min”, “Desv Prom” y “Desv Max”) nos muestran las desviaciones relativas porcentuales, con respecto al valor de la solución óptima, del valor de la mejor solución, el

		Método exacto		Heurística							
	Instancia	Opt	Opt CPU	Veces Opt	Sol min	Sol prom	Sol Max	Desv Min	Desv Prom	Desv Max	Tiempo CPU
1	2du60-05-1	**5305.57**	3.7	10	5305.57	5305.57	5305.57	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.8
2	2du60-05-2	**5451.68**	3.3	10	5451.68	5451.68	5451.68	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.4
3	2du60-05-3	**5507.88**	4.5	10	5507.88	5507.88	5507.88	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.8
4	2du60-05-4	**5935.67**	2.6	10	5935.67	5935.67	5935.67	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.6
5	2du60-05-5	**5303.20**	1.7	10	5303.20	5303.20	5303.20	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.7
6	2du60-05-6	5253.94	4.3	0	5257.91	5257.91	5257.91	0.08 %	0.08 %	0.08 %	2.1
7	2du60-05-7	**5460.18**	2.1	10	5460.18	5460.18	5460.18	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.7
8	2du60-05-8	**5309.96**	1.7	10	5309.96	5309.96	5309.96	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.8
9	2du60-05-9	**5224.51**	1.4	10	5224.51	5224.51	5224.51	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.4
10	2du60-05-10	**5350.15**	2.0	10	5350.15	5350.15	5350.15	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.5
11	2du60-05-11	5150.91	2.2	0	5178.25	5178.25	5178.25	0.53 %	0.53 %	0.53 %	2.5
12	2du60-05-12	5597.50	5.8	0	5607.89	5607.89	5607.89	0.19 %	0.19 %	0.19 %	1.6
13	2du60-05-13	**5731.99**	2.6	10	5731.99	5731.99	5731.99	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.8
14	2du60-05-14	**5462.96**	2.7	10	5462.96	5462.96	5462.96	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.4
15	2du60-05-15	**5332.77**	3.1	10	5332.77	5332.77	5332.77	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.5
16	2du60-05-16	**5399.54**	10.9	10	5399.54	5399.54	5399.54	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.7
17	2du60-05-17	**5602.86**	1.4	10	5602.86	5602.86	5602.86	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.3
18	2du60-05-18	**5773.96**	3.0	10	5773.96	5773.96	5773.96	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.7
19	2du60-05-19	**5543.45**	5.6	10	5543.45	5543.45	5543.45	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.1
20	2du60-05-20	**5767.54**	2.6	10	5767.54	5767.54	5767.54	0.00 %	0.00 %	0.00 %	1.9

Tabla 3: Resultados para las instancias con 60 nodos

promedio de los valores de las diez ejecuciones y el valor de la peor solución, respectivamente, obtenidas con el método propuesto. Finalmente, la última columna muestra el tiempo promedio en segundos requerido por el método propuesto en esta tesis.

En la Tabla 3 observamos los resultados obtenidos para las instancias de 60 nodos con $p = 4$. Para el 85 % de las instancias se encontró una solución óptima. Para las instancias 2du60-05-6, 2du60-05-11 y 2du60-05-12, en las que no se encontró una solución óptima en ninguna de las diez ejecuciones, las desviaciones porcentuales de la media del valor de las soluciones obtenidas en las diez iteraciones, con respecto a los valores de las soluciones óptimas, son 0.08 %, 0.53 % y 0.19 % respectivamente. Esto indica que, para estas instancias, los valores de las soluciones obtenidas son muy cercanos a los valores de las soluciones óptimas. Además, como puede observarse en la Tabla 3, el algoritmo propuesto obtuvo una solución con el mismo valor de la función objetivo en cada una de las diez ejecuciones del método propuesto, y por lo tanto, se observa que para este grupo de instancias de prueba el algoritmo se comporta de manera robusta. Con respecto al esfuerzo computacional, los tiempos requeridos por el método propuesto no son muy competitivos con respecto a los tiempos requeridos por el método exacto.

Los resultados para las instancias de 80 nodos con $p = 5$ se muestran en la Tabla 4. En el 75 % de las instancias se encontró una solución óptima y de ellas, en el 66.67 % de los casos, se encontró una solución óptima en las diez ejecuciones del algoritmo. Aún así, los resultados obtenidos muestran que los valores de las soluciones obtenidas con el heurístico propuesto no están muy alejados de los valores de las soluciones óptimas, ya que la desviación porcentual promedio de la media de los valores de las soluciones en las diez ejecuciones, con respecto a los valores de las soluciones óptimas, es de 0.148 % y en el peor de los casos, la desviación del valor de la solución obtenida con respecto al valor de la solución óptima nunca es mayor que 1.28 %. Los valores de las mejores soluciones obtenidas, cuando se comparan con los valores de las peores soluciones encontradas no muestran diferencias significativas por lo cual, también para estas instancias, podemos decir que la heurística propuesta es robusta. Solo hay un caso, la instancia 2du80-05-19, en donde se puede observar una desviación del promedio de los valores de las soluciones obtenidas con respecto al valor de la solución óptima mayor a 1 %. Con respecto a los tiempos de CPU se puede observar que los tiempos requeridos por el método exacto son, en la mayoría de los casos, un orden de magnitud más grandes que los tiempos requeridos por la heurística propuesta.

Para el caso de las instancias con 100 nodos y $p = 6$, que se muestran en la Tabla 5, los resultados obtenidos son muy similares a los resultados para las instancias de 80 nodos. También se encontró una solución óptima para el 75 % de las instancias de prueba y la heurística propuesta se comporta de manera robusta. En este caso, la desviación porcentual del valor de la peor solución obtenida, con respecto al valor de la solución óptima nunca es mayor a 0.70 %. En el caso de estas instancias, la desviación porcentual promedio de la media de los valores de las soluciones obtenidas en las diez ejecuciones, con respecto a los valores de las soluciones óptimas, es de 0.151 %, lo cual indica que las soluciones obtenidas siguen siendo de muy buena calidad y se pueden obtener con poco esfuerzo computacional. En esta tabla se puede observar también una diferencia de tiempos de CPU, con respecto al método de solución exacto, un orden de magnitud mayores, con excepción de las instancias 2du100-05-7, 2du100-05-8 y 2du100-05-13 donde las diferencias no son tan significativas.

Para las instancias de 150 nodos con $p = 8$ las diferencias en esfuerzo computacional, en algunos casos son considerables. Como se puede observar en la Tabla 6 al método exacto le puede llevar entre 37 y 3000 segundos resolver las distintas instancias de prueba de este grupo, mientras que en el peor caso, el tiempo promedio del heurístico propuesto es de 19 segundos. Además, para el 90 % de las instancias de prueba de este grupo, se obtiene una solución óptima en al menos una de las 10 ejecuciones y para el 40 % de las instancias se obtiene una solución óptima en las 10 ejecuciones del algoritmo. Asimismo, en el peor de los casos, la desviación porcentual del valor de la solución obtenida con el heurístico, con respecto al valor de la solución óptima, nunca es mayor a 1.04 %, confirmando la propiedad de robustez de algoritmo propuesto. También es importante mencionar que la desviación porcentual promedio de la media de los valores de las soluciones obtenidas con el método propuesto, con respecto a los valores de la soluciones óptimas, es de 0.114 %.

Finalmente, en la Tabla 7 se puede observar el desempeño del método heurístico propuesto para las instancias de 200 nodos y $p = 11$. Para este grupo de instancias, se observa que se obtiene la solución óptima en al menos una de las diez ejecuciones del algoritmo para el 20 % de las instancias de prueba. No obstante, los resultados siguen siendo muy satisfactorios con respecto a la calidad de las soluciones obtenidas ya que la desviación porcentual promedio de la media de los valores de las soluciones obtenidas con el heurístico, con respecto a los valores de las soluciones óptimas, es tan solo de 0.297 % y en el peor de los casos, la desviación del valor de la solución obtenido con la heurística, con respecto al valor de la solución óptima, nunca excede de 1.36 %. Con respecto al esfuerzo computacional requerido, en algunos casos, los tiempos de CPU del método exacto ya superan a los tiempos de CPU del heurístico en varios órdenes de magnitud. En promedio, para este grupo de instancias, el método heurístico requiere 16 segundos mientras que para el método exacto, en promedio se requieren 1672 segundos.

		Método exacto		Heurística							
	Instancia	Opt	Opt CPU	Veces Opt	Sol min	Sol prom	Sol Max	Desv Min	Desv Prom	Desv Max	Tiempo CPU
21	2du80-05-1	**6600.56**	58.8	9	6600.56	6600.62	6601.14	0.00 %	0.00 %	0.01 %	2.1
22	2du80-05-2	**6408.82**	6.4	10	6408.82	6408.82	6408.82	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.5
23	2du80-05-3	**6958.05**	11.0	8	6958.05	6975.86	7047.09	0.00 %	0.26 %	1.28 %	2.5
24	2du80-05-4	6900.16	63.0	0	6927.59	6927.94	6928.76	0.40 %	0.40 %	0.41 %	2.4
25	2du80-05-5	**6280.58**	19.2	6	6280.58	6280.98	6281.58	0.00 %	0.01 %	0.02 %	2.4
26	2du80-05-6	**6521.09**	17.3	10	6521.09	6521.09	6521.09	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.2
27	2du80-05-7	**6455.98**	21.2	6	6455.98	6465.36	6479.44	0.00 %	0.15 %	0.36 %	2.4
28	2du80-05-8	**6680.29**	20.6	10	6680.29	6680.29	6680.29	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.4
29	2du80-05-9	6650.21	46.7	0	6688.45	6691.41	6698.32	0.58 %	0.62 %	0.72 %	2.2
30	2du80-05-10	**6534.77**	32.3	5	6534.77	6536.18	6537.59	0.00 %	0.02 %	0.04 %	3.4
31	2du80-05-11	**6539.56**	6.0	10	6539.56	6539.56	6539.56	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.7
32	2du80-05-12	**6704.0**	7.2	10	6704.00	6704.00	6704.00	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.9
33	2du80-05-13	6285.66	12.1	0	6287.23	6287.23	6287.23	0.02 %	0.02 %	0.02 %	3.2
34	2du80-05-14	**6615.8**	23.5	10	6615.80	6615.80	6615.80	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.8
35	2du80-05-15	6990.43	11.5	0	7004.89	7009.86	7017.32	0.21 %	0.28 %	0.38 %	2.2
36	2du80-05-16	**6391.66**	12.2	10	6391.66	6391.66	6391.66	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.6
37	2du80-05-17	**6766.02**	13.5	10	6766.02	6766.02	6766.02	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.2
38	2du80-05-18	**6808.45**	13.1	10	6808.45	6808.45	6808.45	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.1
39	2du80-05-19	6643.17	16.5	0	6722.21	6723.30	6724.93	1.19 %	1.21 %	1.23 %	4.1
40	2du80-05-20	**6873.61**	26.8	10	6873.61	6873.61	6873.61	0.00 %	0.00 %	0.00 %	2.4

Tabla 4: Resultados para las instancias con 80 nodos

		Método exacto		Heurística							
	Instancia	Opt	Opt CPU	Veces Opt	Sol min	Sol prom	Sol Max	Desv Min	Desv Prom	Desv Max	Tiempo CPU
41	2du100-05-1	**7370.14**	80.4	10	7370.14	7370.14	7370.14	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.8
42	2du100-05-2	**7278.46**	55.6	10	7278.46	7278.46	7278.46	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.6
43	2du100-05-3	**7512.29**	30.4	3	7512.29	7522.91	7531.34	0.00 %	0.14 %	0.25 %	3.0
44	2du100-05-4	**7581.57**	10.6	8	7581.57	7585.36	7594.19	0.00 %	0.05 %	0.17 %	3.7
45	2du100-05-5	**7609.50**	84.4	9	7609.50	7610.01	7614.64	0.00 %	0.01 %	0.07 %	3.3
46	2du100-05-6	7243.00	31.3	0	7273.96	7273.96	7273.96	0.43 %	0.43 %	0.43 %	3.2
47	2du100-05-7	**7432.68**	9.9	7	7432.68	7443.65	7469.24	0.00 %	0.15 %	0.49 %	3.2
48	2du100-05-8	**7052.89**	8.9	5	7052.89	7081.49	7113.51	0.00 %	0.41 %	0.86 %	4.2
49	2du100-05-9	**7181.50**	32.8	5	7181.50	7206.17	7231.78	0.00 %	0.34 %	0.70 %	3.4
50	2du100-05-10	7432.89	34.2	0	7442.00	7442.00	7442.00	0.12 %	0.12 %	0.12 %	2.5
51	2du100-05-11	**6829.48**	14.1	10	6829.48	6829.48	6829.48	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.3
52	2du100-05-12	7461.21	13.3	0	7481.55	7482.59	7483.28	0.27 %	0.29 %	0.30 %	3.0
53	2du100-05-13	**7061.61**	8.4	10	7061.61	7061.61	7061.61	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.1
54	2du100-05-14	**7825.62**	11.0	10	7825.62	7825.62	7825.62	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.2
55	2du100-05-15	7158.74	46.9	0	7172.65	7185.09	7195.81	0.19 %	0.37 %	0.52 %	3.2
56	2du100-05-16	7653.16	69.2	0	7695.47	7699.63	7705.87	0.55 %	0.61 %	0.69 %	3.6
57	2du100-05-17	**6880.47**	110.0	8	6880.47	6882.49	6890.55	0.00 %	0.03 %	0.15 %	3.2
58	2du100-05-18	**7438.51**	50.4	8	7438.51	7444.22	7478.53	0.00 %	0.08 %	0.54 %	3.3
59	2du100-05-19	**7238.09**	19.0	10	7238.09	7238.09	7238.09	0.00 %	0.00 %	0.00 %	4.3
60	2du100-05-20	**7590.10**	72.6	10	7590.10	7590.10	7590.10	0.00 %	0.00 %	0.00 %	3.1

Tabla 5: Resultados para las instancias con 100 nodos

		Método exacto		Heurística							
	Instancia	Opt	Opt CPU	Veces Opt	Sol min	Sol prom	Sol Max	Desv Min	Desv Prom	Desv Max	Tiempo CPU
61	du150-05-1	**9511.76**	145.1	5	9511.76	9551.604	9594.82	0.00 %	0.42 %	0.87 %	7.5
62	du150-05-2	**9400.51**	258.4	4	9400.51	9416.6	9461.34	0.00 %	0.17 %	0.65 %	9.1
63	du150-05-3	**9134.57**	71.1	7	9134.57	9134.885	9135.62	0.00 %	0.00 %	0.01 %	10.2
64	du150-05-4	**9359**	96.7	10	9359	9359	9359	0.00 %	0.00 %	0.00 %	8.4
65	du150-05-5	**9506.58**	89.5	10	9506.58	9506.58	9506.58	0.00 %	0.00 %	0.00 %	7.4
66	du150-05-6	**9039.06**	37.6	10	9039.06	9039.06	9039.06	0.00 %	0.00 %	0.00 %	9.2
67	du150-05-7	**9854.7**	829.4	6	9854.7	9882.555	9930.15	0.00 %	0.28 %	0.77 %	6.5
68	du150-05-8	**9199.29**	3046.7	10	9199.29	9199.29	9199.29	0.00 %	0.00 %	0.00 %	19.0
69	du150-05-9	**9670.9**	349.8	4	9670.9	9672.915	9677.65	0.00 %	0.02 %	0.07 %	6.6
70	du150-05-10	9570.58	71.7	0	9579.74	9604.6	9670.14	0.10 %	0.36 %	1.04 %	6.2

Tabla 6: Resultados para las instancias con 150 nodos

		Método exacto		Heurística							
	Instancia	Opt	Opt CPU	Veces Opt	Sol min	Sol prom	Sol Max	Desv Min	Desv Prom	Desv Max	Tiempo CPU
71	du200-05-1	**10422**	302.6	9	10422	10422.71	10429.1	0.00 %	0.01 %	0.07 %	18.6
72	du200-05-2	10639.8	867.0	0	10648.8	10699.86	10784.4	0.08 %	0.56 %	1.36 %	15.5
73	du200-05-3	**10837.9**	303.3	3	10837.9	10842.65	10868.8	0.00 %	0.04 %	0.29 %	13.4
74	du200-05-4	11124.9	2323.3	0	11132.8	11136.65	11152.9	0.07 %	0.11 %	0.25 %	18.6
75	du200-05-5	10874.5	2335.0	0	10889.7	10928.36	10946.7	0.14 %	0.50 %	0.66 %	12.9
76	du200-05-6	10492.2	5574.1	0	10499.3	10527.04	10559	0.07 %	0.33 %	0.64 %	16.8
77	du200-05-7	11020.9	2008.1	0	11038.5	11059.67	11097.3	0.16 %	0.35 %	0.69 %	16.3
78	du200-05-8	10650.7	366.1	0	10659	10700.04	10756.8	0.08 %	0.46 %	1.00 %	17.4
79	du200-05-9	11431.3	2293.9	0	11442.3	11469.14	11499.4	0.10 %	0.33 %	0.60 %	23.9
80	du200-05-10	11039.5	352.4	0	11044.5	11069.58	11090.1	0.05 %	0.27 %	0.46 %	12.9

Tabla 7: Resultados para las instancias con 200 nodos

n	Prom de Desv Prom	Encontró Óptimo
60	0.040 %	85 %
80	0.148 %	75 %
100	0.151 %	75 %
150	0.114 %	90 %
200	0.297 %	20 %

Tabla 8: Resumen de los resultados de método heurístico

De acuerdo con los resultados presentados anteriormente, se puede decir que el desempeño del método heurístico propuesto en esta tesis es muy bueno, ya que proporciona soluciones de muy buena calidad con un esfuerzo computacional más que razonable. En la Tabla 8 se muestra un resumen de los resultados por grupos de instancias de prueba. En esta tabla, la primera columna define el número de unidades básicas para cada grupo de instancias de prueba. La segunda columna muestra la desviación porcentual promedio de la media de las soluciones obtenidas en las diez ejecuciones del algoritmo, con respecto a los valores de las soluciones óptimas. Por último, la última columna muestra el porcentaje de veces que se encontró el óptimo. Como puede observarse en esta tabla, las soluciones obtenidas con el método heurístico propuesto son de buena calidad. En esta tabla se observan también cambios significativos, tanto en la desviación porcentual promedio como en el porcentaje de instancia en las que se encontró la solución óptima, para las instancias de 200 nodos (unidades básicas), con respecto a los otros grupos de instancias de prueba. Se requieren de pruebas adicionales, con instancias de mayor tamaño, para verificar si este comportamiento se debe al incremento en el tamaño de las instancias

Es importante resaltar que el empleo del método heurístico es más apropiado a medida que aumenta el tamaño de las instancias. Como se muestra en la Figura 5 a medida que las instancias aumentan de tamaño, el comportamiento de los tiempos de CPU requeridos por el método exacto propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011) aumenta con mayor velocidad (línea gris) a medida que aumenta el tamaño de las instancias, mientras los tiempos de CPU requeridos por el método heurístico propuesto (línea anaranjada) aumentan mucho más lentamente a medida que aumenta el tamaño de las instancias.

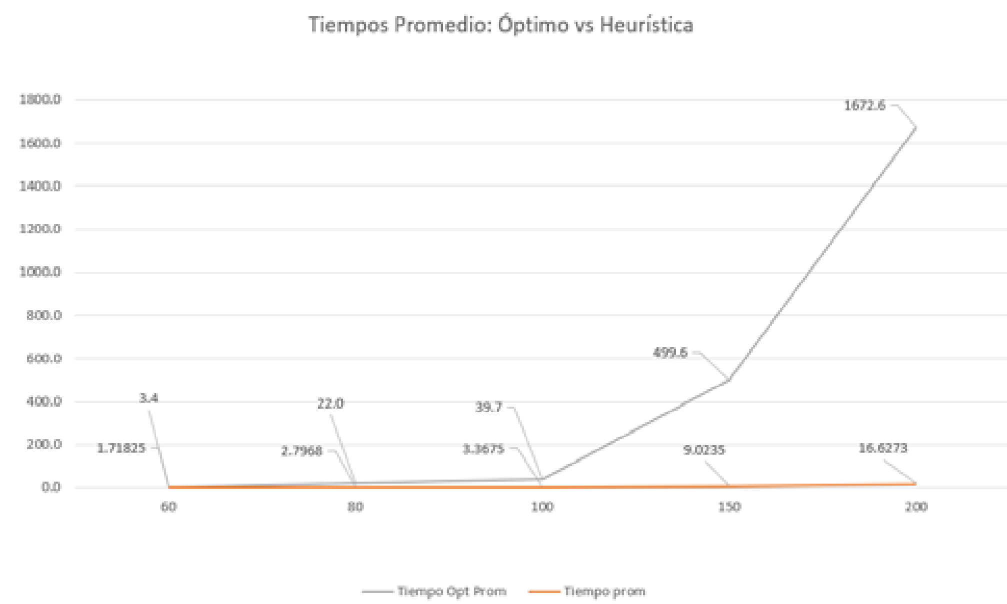

Figura 5: CPU

7. Conclusión y recomendaciones

En esta tesis se propone un método heurístico para resolver el problema de diseño territorial planteado por Salazar-Aguilar y cols. (2011). Entre todas las características que pueden tener los problemas de diseño territorial, el modelo descrito en Salazar-Aguilar y cols. (2011) considera como criterios de planificación territorial, la contigüidad, la compacidad y el balanceo con respecto a varias medidas de actividad. El considerar varias medidas de actividad tiene sentido en algunos casos de aplicación práctica. Por ejemplo, en las aplicaciones relacionas con el diseño de territorios de venta, el manejo de varias medidas de actividad es importante para asegurar una carga de trabajo homogénea entre los distintos representantes de ventas. Esto ayuda a evitar situaciones en las que, por ejemplo, haya representantes de ventas asignados a territorios con pocos clientes pero con un potencial de ventas muy grande, mientras que otros representantes estén asignado a territorios con un potencial de ventas similar, pero con un gran número de clientes.

El propósito de la heurística planteada en este trabajo es obtener soluciones de buena calidad para el problema de manera eficiente. El algoritmo es propuesto en un proceso iterativo, en cada iteración se eligen las medianas para cada uno de los territorios en los que se desea dividir el área geográfica. En la selección de las medianas de los territorios, se busca que estén lo más dispersas posibles en el área geográfica para evitar asignaciones de unidades básicas que estén muy alejadas de las medianas de su territorio, con el fin de que las soluciones satisfagan el criterio de compacidad. Posteriormente, se resuelve un problema de asignación de unidades básicas a los territorios que garanticen que se satisface el criterio de balanceo con respecto a todas las medidas de actividad. Después, para cada uno de los territorios obtenidos, se verifica que las medianas seleccionadas para cada uno de los territorios minimicen el criterio utilizado para obtener territorios compactos. Es decir, que la suma de las distancias entre cada unidad básica y la mediana del territorio al que están asignadas sea lo más pequeña posible. Si para uno o más territorios se observa que la mediana del territorio se puede reemplazar por otra unidad básica, disminuyendo el valor de la función objetivo, se ajusta el conjunto de medianas de los territorios y se resuelve de nueva cuenta el problema de asignación de unidades básicas a territorios. Este proceso se repite hasta que las medianas de cada territorio coincidan con la unidad básica del territorio para el que se minimiza la suma de distancias. Finalmente, se verifica si los territorios obtenidos satisfacen también el criterio de contigüidad. Para ello, se resuelve un problema de separación que identifica si hay uno o varios nodos desconectados del territorio al que pertenecen. La solución del problema de separación proporciona todas las componentes conexas de cada uno de los territorios. Para cada una de las componentes conexas que no contengan a la mediana del territorio se añade una desigualdad válida, que evita que esta componente conexa se repita en la solución óptima del problema de asignación. Este proceso se repite hasta que en la solución óptima del problema de asignación se obtiene una sola componente conexa para cada territorio.

De acuerdo con los resultados obtenidos para el método exacto propuesto por Salazar-Aguilar y cols. (2011) y el método heurístico propuesto en este trabajo, se observa que el método heurístico proporciona en todos los casos soluciones de buena calidad con tiempos de CPU razonablemente pequeños. Esto es más notorio a medida que aumentan el tamaño de las instancias.

Se reconoce que existen oportunidades de mejora que se pueden incorporar en la heurística propuesta. Entre ellas identificamos las siguientes:

- Incorporar la fase de ajuste de medianas después de la fase que asegura la conectividad de la solución, ya que las desigualdades válidas asociadas a las restricciones de contigüidad pueden provocar que algunas unidades básicas sean reasignadas a otros territorios.
- Desarrollo de un método de Búsqueda Dispersa, que utilice las soluciones generadas por el heurístico propuesto en este trabajo para inicializar un conjunto de referencia que contenga soluciones de buena calidad y soluciones dispersas. A partir de esto, se pueden diseñar métodos de combinación y mejora de soluciones.
- Generar instancias de mayor tamaño para el problema para observar con mayor claridad si el desempeño de la heurística propuesta se deteriora al incrementar el tamaño de las instancias.
- Agregar todas las desigualdades válidas identificadas por el método heurístico propuesto a la formulación del problema de diseño territorial propuesto en Salazar-Aguilar y cols. (2011) y utilizar las soluciones obtenidas por el heurístico propuesto como incumbentes en el método de solución exacto propuesto por estos autores, para observar si esto ayuda a mejorar su desempeño.

Referencias

Ahuja, N., Bender, M., Sanders, P., Schulz, C., y Wagner, A. (2015). Incorporating road networks into territory design. En *Proceedings of the 23rd sigspatial international conference on advances in geographic information systems* (p. 4).

Blais, M., Lapierre, S. D., y Laporte, G. (2003). Solving a home-care districting problem in an urban setting. *Journal of the operational research society*, *54*(11), 1141–1147.

Bodin, L. D. (1973). A districting experiment with a clustering algorithm. *Annals of the New York Academy of Sciences*, *219*(1), 209–214.

Bourjolly, J.-M., Laporte, G., y Rousseau, J.-M. (1981). Decoupage electoral automatise: Application a l'lle de montreal. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, *19*(2), 113–124.

Bozkaya, B., Erkut, E., y Laporte, G. (2003). A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research*, *144*(1), 12–26.

Caballero-Hernández, S. I., Ríos-Mercado, R. Z., López, F., y Schaeffer, S. E. (2007). Empirical evaluation of a metaheuristic for commercial territory design with joint assignment constraints. En *Proceedings of the 12th annual international conference on industrial engineering theory, applications, and practice (ijie)* (pp. 422–427).

Camacho-Collados, M., Liberatore, F., y Angulo, J. M. (2015). A multi-criteria police districting problem for the efficient and effective design of patrol sector. *European Journal of Operational Research*, *246*(2), 674–684.

Carvajal, R., Constantino, M., Goycoolea, M., Vielma, J. P., y Weintraub, A. (2013). Imposing connectivity constraints in forest planning models. *Operations Research*, *61*(4), 824–836.

Cirincione, C., Darling, T. A., y O'Rourke, T. G. (2000). Assessing south carolina's 1990s congressional districting. *Political Geography*, *19*(2), 189–211.

Drexl, A., y Haase, K. (1999). Fast approximation methods for sales force deployment. *Management Science*, *45*(10), 1307–1323.

Easingwood, C. (1973). A heuristic approach to selecting sales regions and territories. *Journal of the Operational Research Society*, *24*(4), 527–534.

Elizondo-Amaya, M. G., Ríos-Mercado, R. Z., y Díaz, J. A. (2014). A dual bounding scheme for a territory design problem. *Computers & Operations Research*, *44*, 193–205.

Fernández, E., Kalcsics, J., Nickel, S., y Ríos-Mercado, R. Z. (2010). A novel maximum dispersion territory design model arising in the implementation of the weee-directive. *Journal of the Operational Research Society*, *61*(3), 503–514.

Fisher, M. L., Jaikumar, R., y Van Wassenhove, L. N. (1986). A multiplier adjustment method for the generalized assignment problem. *Management*

Science, *32*(9), 1095–1103.

Fleischmann, B., y Paraschis, J. N. (1988). Solving a large scale districting problem: a case report. *Computers & Operations Research*, *15*(6), 521–533.

Forman, S. L., y Yue, Y. (2003). Congressional districting using a tsp-based genetic algorithm. En *Genetic and evolutionary computation conference* (pp. 2072–2083).

Frankovich, M. J. (2012). *Air traffic flow management at airports: A unified optimization approach* (Tesis Doctoral no publicada). Massachusetts Institute of Technology.

Fryer Jr, R. G., y Holden, R. (2011). Measuring the compactness of political districting plans. *The Journal of Law and Economics*, *54*(3), 493–535.

Garfinkel, R. S., y Nemhauser, G. L. (1970). Optimal political districting by implicit enumeration techniques. *Management Science*, *16*(8), B–495.

George, J. A., Lamar, B. W., y Wallace, C. A. (1997). Political district determination using large-scale network optimization. *Socio-Economic Planning Sciences*, *31*(1), 11–28.

Glaze, T. A., y Weinberg, C. B. (1979). A sales territory alignment program and account planning system. *Sales Management: New Developments from Behavioral and Decision Model Research*, 325–343.

Helbig, R. E., Orr, P. K., y Roediger, R. R. (1972). Political redistricting by computer. *Communications of the ACM*, *15*(8), 735–741.

Hess, S. W., y Samuels, S. A. (1971). Experiences with a sales districting model: criteria and implementation. *Management Science*, *18*(4-part-ii), P–41.

Hess, S. W., Weaver, J., Siegfeldt, H., Whelan, J., y Zitlau, P. (1965). Nonpartisan political redistricting by computer. *Operations Research*, *13*(6), 998–1006.

Hojati, M. (1996). Optimal political districting. *Computers & Operations Research*, *23*(12), 1147–1161.

Hu, F., Yang, S., y Xu, W. (2014). A non-dominated sorting genetic algorithm for the location and districting planning of earthquake shelters. *International Journal of Geographical Information Science*, *28*(7), 1482–1501.

Kalcsics, J., Nickel, S., y Schröder, M. (2005). Towards a unified territorial design approach—applications, algorithms and gis integration. *Top*, *13*(1), 1–56.

Kaufman, A., King, G., y Komisarchik, M. (2017). *How to measure legislative district compactness if you only know it when you see it.* no.

Marlin, P. G. (1981). Application of the transportation model to a large-scale "districting" problem. *Computers & Operations Research*, *8*(2), 83–96.

Mehrotra, A., Johnson, E. L., y Nemhauser, G. L. (1998). An optimization based heuristic for political districting. *Management Science*, *44*(8), 1100–1114.

Moreno, S., Pereira, J., y Yushimito, W. (2017). A hybrid k-means and integer programming method for commercial territory design: a case study in meat distribution. *Annals of Operations Research*, 1–31.

Nygreen, B. (1988). European assembly constituencies for wales-comparing of methods for solving a political districting problem. *Mathematical Programming*, *42*(1-3), 159–169.

Ricca, F., y Simeone, B. (1997). Political districting: traps, criteria, algorithms and trade-offs. *Ricerca Operativa*.

Rincón-García, E. A., Gutiérrez-Andrade, M. Á., de-los Cobos-Silva, S. G., Mora-Gutiérrez, R. A., Ponsich, A., y Lara-Velázquez, P. (2017). A comparative study of population-based algorithms for a political districting problem. *Kybernetes*, *46*(1), 172–190.

Ríos-Mercado, R. Z., y Fernández, E. (2009). A reactive grasp for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements. *Computers & Operations Research*, *36*(3), 755–776.

Ronen, D. (1983). Sales territory alignment for sparse accounts. *Omega*, *11*(5), 501–505.

Salazar-Aguilar, M. A., Ríos-Mercado, R. Z., y Cabrera-Ríos, M. (2011). New models for commercial territory design. *Networks and Spatial Economics*, *11*(3), 487–507.

Segal, M., y Weinberger, D. B. (1977). Turfing. *Operations Research*, *25*(3), 367–386.

Shanker, R. J., Turner, R. E., y Zoltners, A. A. (1975). Sales territory design: an integrated approach. *Management Science*, *22*(3), 309–320.

Shirabe, T. (2009). Districting modeling with exact contiguity constraints. *Environment and Planning B: Planning and Design*, *36*(6), 1053–1066.

Skiera, B., y Albers, S. (1993). *Costa: Ein entscheidungs-unterstützungs-system zur deckungsbeitragsmaximalen einteilung von verkaufsgebieten* (Inf. Téc.). Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel.

Zoltners, A. A. (1979). A unified approach to sales territory alignment. *Sales Management: New Developments from Behavioral and Decision Model Research*, 360–376.

Zoltners, A. A., y Sinha, P. (1983). Sales territory alignment: A review and model. *Management Science*, *29*(11), 1237–1256.