

UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ACTUARÍA Y MATEMÁTICAS

UDLAP®

LA FORMA DE LOS DATOS

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE

VÍCTOR ANDRÉ RODRÍGUEZ ÁVILA

164356

DR. HUGO VILLANUEVA MÉNDEZ

SAN ANDRÉS CHOLULA, PUEBLA.

PRIMAVERA, 2022

TESIS QUE, PARA COMPLETAR LOS REQUISITOS DEL PROGRAMA DE
HONORES PRESENTA EL ESTUDIANTE VÍCTOR ANDRÉ RODRÍGUEZ
ÁVILA Y 164356

DIRECTOR DE TESIS



Dr. Hugo Villanueva Méndez

PRESIDENTE DE TESIS



Dr. Augusto César Piceno Cabrera

SECRETARIO DE TESIS



Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

Índice

1. Introducción a la topología	4
1.1. Espacios topológicos	4
1.2. Bases de topología	10
1.3. Espacios métricos	16
1.4. Subespacios y continuidad	23
1.5. Homeomorfismos	31
1.6. Geometría simplicial	32
2. Análisis de conglomerados	41
2.1. Filtraciones de datos	41
2.2. Homotopía	45
2.3. El Teorema del Nervio	51
3. Homología	58
3.1. Invariantes homotópicas	58
3.2. Conceptos y definiciones	61
3.3. Aspectos estadísticos de la inferencia homológica	76
3.4. Homología persistente	79
3.5. Filtros	86
3.6. Homología y aprendizaje de máquina	89
4. Aplicaciones de topología de datos en la ciencia de datos	97

Resumen

La recién emergente disciplina de la topología aplicada se conoce como análisis topológico de datos. Utiliza conceptos topológicos para estudiar la forma de los datos y hacer mejoras en métodos computacionales, como el aprendizaje de máquina. Dado que en la carrera de actuaría se analizan diversos conjuntos de datos para diferentes propósitos desde diversas perspectivas, este tema resulta fascinantemente prometedor para analizar enormes cantidades de datos. No obstante, no muchas herramientas de la topología son utilizadas a lo largo de la carrera, por lo que en este trabajo se encuentran delineados de manera formal elementos generales de la topología encaminados al análisis topológico de datos. Trato de mantener un desarrollo formal durante todo el documento, por lo que la mayoría de los conceptos utilizados estarán formalmente definidos y los resultados justificados.

Palabras clave: análisis topológico de datos, topología aplicada, homología persistente

1. Introducción a la topología

En la última década la topología y los algoritmos se han conformado de una potente combinación de disciplinas con muchas aplicaciones teóricas y prácticas. El incremento en la producción de datos y su accesibilidad han provocado que actualmente contemos con datos masivos que, dado su volumen, son propensos a tener sesgo y errores. Esto implica que sea necesario crear sistemas más complejos para procesarlos como lo es el análisis topológico de datos; una reciente técnica desarrollada para el análisis de este tipo de cúmulos de datos. Se ha planteado con el propósito de inferir información de un sistema de datos a partir de muestras representadas como un espacio topológico combinatorio.

En este primer capítulo repasaremos y desarrollaremos ideas elementales de la topología. Repaso los temas más clásicos relacionados al tema. Al analizar datos masivos se nos presentan problemas como los siguientes:

- (1) cómo hacer inferencias sobre una estructura de datos de alta dimensión; y
- (2) cómo estudiar puntos discretos localmente de una estructura global.

En [8] hay un estudio completo sobre algunas formas de manejar estos problemas.

De manera coloquial, la topología es el estudio de la forma general de un conjunto de datos. Por lo tanto, como complemento de las características geométricas, generalmente inflexibles, las características topológicas permiten entender propiedades de grandes escalas, globales e intrínsecas de los conjuntos de datos.

1.1. Espacios topológicos

Empezaremos con varias definiciones elementales y se presentará su utilidad en temas posteriores. Evidentemente, la primera de estas definiciones será la de topología.

Topología

Definición 1.1. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X , llamados los **conjuntos abiertos**, que satisface:

- 1) Cualquier unión de elementos de τ pertenece a τ ,
- 2) cualquier intersección finita de elementos de τ pertenece a τ ,
- 3) \emptyset y X pertenecen a τ .

Decimos que (X, τ) es un **espacio topológico**.

En este caso, X es el conjunto que deseamos estudiar, y le definimos una topología, que es una familia de conjuntos de X . Esta topología nos permitirá trabajar con una estructura en X . Aquí, una topología nos indica una forma de medir cercanía o similitud entre dos puntos del conjunto de interés y varía según la forma en que esté definida.

Ya que tenemos una topología bien definida, podemos compararla con otras y definir características de sus elementos.

Topologías comparables

Definición 1.2. Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 sobre el mismo conjunto X , decimos que τ_1 es **más débil (más pequeña, más gruesa)** que τ_2 , o τ_2 es **más fuerte (más grande, más fina)** que τ_1 si y sólo si $\tau_1 \subset \tau_2$.

Podemos pensar en que τ_2 es más fina que τ_1 porque tiene más abiertos; es decir, su división es más completa que la de τ_1 . La topología discreta sería, entonces, la más fina de todas. A lo largo de esta tesis, en la mayoría de los temas usaremos el concepto de conjunto abierto y conjunto cerrado para desarrollar la teoría.

Conjunto abierto

Definición 1.3. Si (X, τ) es un espacio topológico, diremos que un subconjunto U de X es un **conjunto abierto** en X si $U \in \tau$.

Conjuntos cerrados

Definición 1.4. Si (X, τ) es un espacio topológico y $E \subset X$, decimos que E es **cerrado** si y sólo si $X \setminus E$ es abierto.

Por ejemplo, sea X cualquier conjunto y sea $\tau = \mathcal{P}(X)$ la colección de *todos* los subconjuntos de X . Entonces τ es claramente una topología para X : se llama la topología *discreta*. Es más fina que cualquier otra topología sobre X .

Teorema 1.1. Si \mathcal{F} es la colección de conjuntos cerrados en un espacio topológico (X, τ) , entonces

- a) Cualquier intersección de miembros de \mathcal{F} pertenece a \mathcal{F} ,
- b) Cualquier unión finita de miembros de \mathcal{F} pertenece a \mathcal{F} ,
- c) X y \emptyset ambos pertenecen a \mathcal{F} .

A la inversa, dado un conjunto X y cualquier familia \mathcal{F} de subconjuntos de X que satisface a), b) y c), la colección de complementos de los miembros de \mathcal{F} es una topología sobre X en la que la familia de conjuntos cerrados es simplemente \mathcal{F} .

Demostración.

- a) De la definición (1.1) sabemos que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto si cada A_λ lo es. Por las leyes de De Morgan,

$$A^c = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

es cerrado.

- b) De la definición (1.1), sabemos que $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto si cada A_i es abierto. Por las leyes de De Morgan,

$$A^c = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

es cerrado.

- c) Por la definición (1.1), tanto $\emptyset^c = X$ como $X^c = \emptyset$ son cerrados. ■

El teorema (1.1) ilustra y es un resultado de la evidente dualidad entre las nociones de abierto y cerrado. En general, pueden haber conjuntos que no sean ni cerrados ni abiertos. Debido a esto, se definen operaciones en los conjuntos de un espacio topológico como la cerradura, el interior y la frontera. Cada uno de estos tienen una interpretación geométrica. La cerradura de un conjunto es el conjunto mismo más los puntos en su «borde» o pegados a él, volviéndolo así, un conjunto cerrado. De esta manera, podemos manejar la cerradura de un conjunto con los resultados que conocemos para conjuntos cerrados.

Cerradura

Definición 1.5. Si (X, τ) es un espacio topológico y $E \subset X$, la **cerradura** de E en X es el conjunto

$$\overline{E} = \text{Cl}(E) = \bigcap \{K \subset X \mid K \text{ es cerrado y } E \subset K\}.$$

De la definición de cerradura, vemos que es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a E , en el sentido de que están contenido en cualquier conjunto cerrado que contenga a E .

Lema 1.1. Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Demostración. Como $B \subseteq \overline{B}$, si A está contenido en B , tenemos $A \subset \overline{B}$; dado que \overline{B} es cerrado, debemos tener $\overline{A} \subset \overline{B}$. ■

Teorema 1.2. La operación $A \mapsto \bar{A}$ en un espacio topológico (X, τ) tiene las siguientes propiedades:

- a) $E \subset \bar{E}$,
- b) $\overline{(\bar{E})} = \bar{E}$
- c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- d) $\bar{\emptyset} = \emptyset$,
- e) E es cerrado en X si y solo si $\bar{E} = E$.

Además, dado un conjunto X y una función $A \mapsto \bar{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$ que satisface desde a) hasta d), si definimos conjuntos cerrados en X usando e), el resultado es una topología sobre X cuya operación cerradura es simplemente la operación $A \mapsto \bar{A}$ con la que empezamos.

Demostración.

- a) Por definición, \bar{E} es la intersección de cerrados que contienen a E . Así, $E \subset \bar{E}$.
- b) $\overline{(\bar{E})} = \bigcap \{K \subset X \mid K \text{ es cerrado} \wedge \bar{E} \subset K\} = \bar{E}$ porque \bar{E} es el cerrado más pequeño que contiene a E .
- c) Ya que $\bar{A \cup B}$ es cerrado y contiene a $A \cup B$, contiene a $\overline{A \cup B}$. Por otro lado, dado que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ tenemos $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, por el lema 8.1, y por consiguiente $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.
- d) Está claro porque \emptyset no tiene elementos y, además, es cerrado.
- e) Si E es cerrado, entonces E es el cerrado más pequeño que contiene a E . De esta forma, $E = \bar{E}$.
Ahora, si $E = \bar{E}$, es evidente que E es cerrado.

Procedemos con la segunda parte del teorema. Sea X cualquier conjunto y $A \mapsto \bar{A}$ una función de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$ que satisface desde a) hasta d). Sea \mathcal{F} la colección de todos los conjuntos A tales que $\bar{A} = A$. La afirmación es que \mathcal{F} satisface desde a) hasta c) del teorema (1.1).

Primero notemos que si $A \subset B$, entonces por c), $\bar{B} = \bar{A} \cup \overline{(B \setminus A)}$ de forma que $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Ahora suponemos que $F_\lambda \in \mathcal{F}$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Entonces como $\bigcap F_\lambda$ está contenida en F_λ , $\overline{\bigcap F_\lambda}$ está contenida en \bar{F}_λ para cualquier λ , y por tanto

$$\overline{\bigcap F_\lambda} \subset \bigcap \bar{F}_\lambda = \bigcap F_\lambda.$$

Pero la inclusión inversa está dada por a), así que $\overline{\bigcap F_\lambda} = \bigcap F_\lambda$, esto es,

$$\bigcap F_\lambda \in \mathcal{F}.$$

Así, a) del teorema (1.1) se cumple.

Ahora supongamos que $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$. Entonces por c) e inducción,

$$\overline{F_1 \cup \dots \cup F_n} = \overline{F_1} \cup \dots \cup \overline{F_n} = F_1 \cup \dots \cup F_n \implies F_1 \cup \dots \cup F_n \in \mathcal{F}.$$

Esto establece b) del teorema (1.1).

Por d) y a), es claro que \emptyset y X , respectivamente, pertenecen a \mathcal{F} , así que c) del teorema (1.1) se cumple.

Por tanto, \mathcal{F} es una colección de conjuntos cerrados para X .

Queda por mostrar que la operación de cierre resultante en X es solo la operación $A \mapsto \overline{A}$ con la que empezamos; es decir, que \overline{A} es el elemento más pequeño de \mathcal{F} que contiene a A , para cada $A \subset X$. Ya que $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ por c), sabemos que $\overline{A} \in \mathcal{F}$, y de a), sabemos que $A \subset \overline{A}$. Si K es cualquier elemento de \mathcal{F} que contiene a A , entonces $\overline{A} \subset \overline{K} = K$. Así, \overline{A} es, en efecto, el elemento más pequeño de \mathcal{F} que contiene a A . ■

Ahora, el interior de un conjunto es el conjunto pero sin los puntos pegados a él o que están en su «borde». Evidentemente, el interior es un conjunto abierto.

Interior

Definición 1.6. Si (X, τ) es un espacio topológico y $E \subset X$, el **interior** de E en X es el conjunto

$$E^\circ = \text{Int}(E) = \bigcup \{G \subset X \mid G \text{ es abierto y } G \subset E\}.$$

El interior es el conjunto abierto más grande contenido en E , en el sentido de que contiene a cualquier otro conjunto abierto contenido en E .

Las nociones de interior y cerradura son duales entre sí, de la misma manera que lo son «abierto» y «cerrado». El carácter estrictamente formal de esta dualidad puede ponerse de manifiesto al observar que

$$\begin{aligned} X \setminus E^\circ &= \overline{X \setminus E} \\ X \setminus \overline{E} &= (X \setminus E)^\circ. \end{aligned}$$

Así, cualquier teorema sobre clausuras en un espacio topológico se puede traducir a un teorema sobre interiores.

Lema 1.2. Si $A \subset B$, entonces $A^\circ \subset B^\circ$.

Demostración. Está claro que $A^\circ \subset A$, así que si $A \subset B$, tenemos $A^\circ \subset B$. Así, A° es un conjunto abierto contenido en B , entonces $A^\circ \subset B^\circ$. ■

Teorema 1.3. La operación interior $A \mapsto A^\circ$ en un espacio topológico (X, τ) tiene las siguientes propiedades:

- a) $A^\circ \subset A$.
- b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
- c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- d) $X^\circ = X$.
- e) G es abierto si y sólo si $G^\circ = G$.

Por el contrario, dado cualquier función $A \mapsto A^\circ$ de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$ en un conjunto X , que satisface desde a) hasta d), si los conjuntos abiertos se definen en X usando e), el resultado es una topología sobre X en la que el interior de un conjunto $A \subset X$ es simplemente A° .

Demostración. La demostración se puede hacer directamente o usando el proceso de traslación en el teorema (1.2). ■

Ahora sí, formalizamos el concepto de frontera de un conjunto en un espacio topológico.

Frontera

Definición 1.7. Si (X, τ) es un espacio topológico y $E \subset X$, la **frontera** de E es el conjunto

$$\text{Fr}(E) = \overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)},$$

usualmente escrito $\text{Fr}(E)$. Evidentemente, la frontera de E es un conjunto cerrado.

Es posible pero poco gratificante caracterizar una topología completamente por su operación de frontera. Nos conformaremos con dar la relación entre frontera, cierre y operación interior.

Teorema 1.4. Para cualquier subconjunto E de un espacio topológico (X, τ) :

- a) $\overline{E} = E \cup \text{Fr}(E)$
- b) $E^\circ = E \setminus \text{Fr}(E)$
- c) $X = E^\circ \cup \text{Fr}(E) \cup (X \setminus E)^\circ$.

Demostración.

- a) $E \cup \text{Fr}(E) = E \cup (\overline{E} \cap \overline{X \setminus E}) = (E \cup \overline{E}) \cap (E \cup \overline{X \setminus E}) = \overline{E} \cap X = \overline{E}$.
- b) $E \setminus \text{Fr}(E) = E \setminus (\overline{E} \cap \overline{X \setminus E}) = (E \setminus \overline{E}) \cup (E \setminus \overline{X \setminus E}) = E \setminus \overline{X \setminus E} = E^\circ$.
- c) Como $\text{Fr}(E) \cup (X \setminus E) = \overline{X \setminus E}$ y ya que

$$X \setminus E^\circ = \overline{X \setminus E},$$

tenemos

$$X = E^\circ \cup \overline{X \setminus E} = E^\circ \cup \text{Fr}(E) \cup (X \setminus E)^\circ.$$

■

Observación. Si el punto $x \in \text{Fr}(A)$, entonces puede o no pertenecer a A .

Del punto a) del teorema (1.4) se ve que un conjunto es cerrado si y sólo si lo unimos con su frontera, entonces queda exactamente igual.

Los medios que tenemos a mano hasta ahora para describir topologías no son los más convenientes, y por esta razón rara vez se usan. Muy a menudo, la topología que deseamos presentar es bastante «regular», en el sentido de que los conjuntos abiertos que contienen un punto no se diferencian de los conjuntos abiertos que contienen cualquier otro. En tales casos, uno puede describir la topología describiendo cómo se ve «alrededor» de un punto, o de algunos puntos, y luego retirarse del campo con la observación de que alrededor de otros puntos es lo mismo.

Vecindad

Definición 1.8. Si (X, τ) es un espacio topológico y $x \in X$, una **vecindad** de x es un conjunto U que contiene un conjunto abierto V que contiene a x . Por tanto, evidentemente, U es una vecindad de x si y sólo si $x \in U^\circ$.

Podemos restringirnos más aún a conjuntos más selectos para estudiar el comportamiento cerca de un punto dado.

Base de vecindad

Definición 1.9. Una **base de vecindad** en x en el espacio topológico (X, τ) es una subcolección \mathcal{B}_x tomada de la colección \mathcal{U}_x de todas las vecindades de x , que tiene la propiedad de que cada $U \in \mathcal{U}_x$ contiene algún $V \in \mathcal{B}_x$.

1.2. Bases de topología

La topología sobre todo X se puede especificar, sin describir cada uno de los conjuntos abiertos, al dar una *base para la topología*. Así, la topología está definida en términos

de su base. τ se puede obtener de \mathcal{B} al tomar todas las posibles uniones de subcolecciones de \mathcal{B} .

Base

Definición 1.10. Si (X, τ) es un espacio topológico, una **base** para τ es una colección $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \right\}.$$

El siguiente teorema (1.5) enlista algunas propiedades que las bases gozan y proporciona la afirmación inversa: cualquier estructura sobre un conjunto X con estas propiedades produce una topología sobre X . Si se tiene una topología dada τ y se quiere saber si una colección en particular \mathcal{B} de conjuntos es una base para τ el siguiente teorema se puede usar para mostrar que \mathcal{B} es una base para *alguna* topología, pero se debe regresar a la definición (1.10) de base para mostrar que la topología generada por \mathcal{B} es τ .

Teorema 1.5. \mathcal{B} es una base para una topología sobre X si y sólo si

a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, i. e., para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x .

b) Siempre que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ con $p \in B_1 \cap B_2$, existe algún $B_3 \in \mathcal{B}$ con

$$p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Demostración. Si \mathcal{B} es una base para una topología sobre X , las dos propiedades son claras. Supongamos, por otro lado, que X es un conjunto y \mathcal{B} una colección de subconjuntos de X con estas propiedades. Sea τ todas las uniones de subcolecciones de \mathcal{B} . Entonces cualquier unión de miembros de τ ciertamente pertenece a τ , así que τ satisface 1) de la definición 1.1. Más aún, si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$, de manera que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$ y

$\bigcup_{C \in \mathcal{B}_2} C$ son elementos de τ , entonces

$$\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left(\bigcup_{C \in \mathcal{B}_2} C \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} \bigcup_{C \in \mathcal{B}_2} (B \cap C).$$

Pero por la propiedad (b), la intersección de dos elementos de \mathcal{B} es una unión de elementos de \mathcal{B} , por lo que

$$\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \right) \cap \left(\bigcup_{C \in \mathcal{B}_2} C \right)$$

es una unión de elementos de \mathcal{B} , y por tanto pertenece a τ . Así, τ satisface 2) de la definición 1.1. Finalmente, $X \in \tau$ por (a) y $\emptyset \in \tau$, ya que es la unión de la subcolección vacía de \mathcal{B} . Por lo tanto, τ satisface 3) de la definición 1.1. Esto completa la demostración de que τ es una topología sobre X . ■

Observación. Cada elemento básico es así mismo un elemento de τ .

Para no perder formalidad, a continuación demostramos que la familia de conjuntos generada por \mathcal{B} sí resulta ser una topología.

Teorema 1.6. *La colección τ generada por \mathcal{B} es, en efecto, una topología para X .*

Demostración. Hay que recordar que, por el teorema (1.1),

$$\tau = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U\}.$$

Hay que demostrar que este conjunto cumple con las tres condiciones de la definición (1.1).

1) Sea $\{U_\alpha\} \subseteq \tau$. Veamos que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \tau$. Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, entonces $x \in U_\beta$ para algún $\beta \in \Lambda$. Como $U_\beta \in \tau$, existe algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

Con esto tenemos que para cualquier elemento de la unión, encontramos un básico dentro de la unión que tiene a x .

2) Para esta condición de la intersección finita es suficiente con comprobarla para dos conjuntos. Sean $U_1, U_2 \in \tau$. Veamos que $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Tomemos $x \in U_1 \cap U_2$, esto significa que $x \in U_1$ y $x \in U_2$. Como $U_1 \in \tau$, hay algún $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1 \subseteq U_1$ y esto mismo aplica para U_2 . Esto es; como $U_2 \in \tau$, existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_2 \subseteq U_2$. Dado que $x \in B_1 \cap B_2$, por el punto b) del teorema 1.1, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Concluimos que $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3) $X \in \tau$ porque si $x \in X$, existe un básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X$. Esta condición se cumple por la afirmación a) del teorema (1.1). Ahora, $\emptyset \in \tau$ porque para cada elemento del vacío existe un básico que lo contiene y está dentro del vacío por vacuidad. El vacío no tiene elementos, por lo que no hay elementos a los que aplicarles esta propiedad. ■

Con este teorema ya tenemos cómo son los abiertos generados por una base para una topología. Existe otra manera de describir τ , dado por el siguiente lema.

Lema 1.3. *Sea X un conjunto y \mathcal{B} una base para una topología sobre X . Entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de \mathcal{B} .*

Demostración. Si $U \in \tau$ y si $x \in U$, existe un básico $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Entonces,

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

■

Observación. Cada conjunto abierto U de X se puede expresar como una unión de elementos básicos; pero esta expresión para U no es necesariamente única.

Que no haya una representación única para la base de una topología permite tener cierta flexibilidad al momento de estudiar un conjunto de datos, así se usa la perspectiva que más convenga.

Lema 1.4. Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases para las topologías τ y τ' , respectivamente, sobre X . Entonces son equivalentes:

1. τ' es más fina que τ .
2. Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x , existe un elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Demostración.

- 1 \Rightarrow 2 La condición 1 dice que $\tau \subseteq \tau'$. Sean $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \in \tau \subseteq \tau'$. Como $B \in \tau'$ y $x \in B$, por las condiciones del teorema (1.1), existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.
- 2 \Rightarrow 1 Sea $U \in \tau$. Veamos que $U \in \tau'$. Para esto vamos a usar que τ' es generada por \mathcal{B}' ; es decir, U se puede generar con elementos de \mathcal{B}' . Sea $x \in U$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Por 2, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B \subseteq U$. Por tanto, $U \in \tau'$.

■

Podemos ir un paso más allá al reducir el tamaño de la colección que debemos especificar para describir una topología.

Subbase

Definición 1.11. Si (X, τ) es un espacio topológico, una *subbase* para τ es una colección $\mathcal{C} \subset \tau$ tal que la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{C} forman una base para τ .

De manera formal, el siguiente teorema (1.7) nos otorga cierta libertad al momento de construir una subbase para una topología.

Teorema 1.7. *Cualquier colección de subconjuntos de un conjunto X es una subbase para alguna topología sobre X .*

Demostración. Sea \mathcal{S} una familia de subconjuntos de X . Sea $\tau(\mathcal{S})$ la intersección de todas las topologías que contienen a \mathcal{S} . Tales topologías existen pues $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ es una de ellas. $\tau(\mathcal{S})$ es también una topología. Evidentemente satisface los requerimientos de «única» y «más pequeña».

La topología $\tau(\mathcal{S})$ se puede describir como sigue: Consiste de \emptyset , X , todas las intersecciones de conjuntos de \mathcal{S} , y todas las uniones arbitrarias de estas intersecciones finitas. Para verificar esto, notemos que como $\mathcal{S} \subset \tau(\mathcal{S})$, entonces $\tau(\mathcal{S})$ debe contener todos los conjuntos listados. A la inversa, como \bigcup se distribuye sobre \bigcap , los conjuntos listados sí forman una topología que contiene a \mathcal{S} y por tanto contiene a $\tau(\mathcal{S})$. ■

Nuestro objetivo ahora es definir una topología sobre el producto cartesiano de espacios topológicos, en alguna manera natural y útil. Primero extendemos la noción de producto cartesiano a colecciones infinitas de conjuntos. Pero primero necesitamos el axioma de elección para asegurar que el producto cartesiano de una colección no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío. Este axioma es asumido por la mayoría de los matemáticos cuando lo necesitan.

Axioma de elección

Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos no vacíos, existe un conjunto $B \subset \bigcup A_\lambda$ tal que $B \cap A_\lambda$ tiene exactamente un elemento, para cada $\lambda \in \Lambda$.

El axioma de elección permite elegir un elemento representante de cada conjunto A_λ para cada índice λ . Es por eso que se llama axioma de elección. De esta manera, podemos definir el producto cartesianos sin que quede vacío.

Producto cartesiano

Definición 1.12. Sea X_α un conjunto, para cada $\alpha \in \Lambda$. El **producto cartesiano** de los conjuntos X_α es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \left\{ x : \Lambda \mapsto \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid x(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda \right\}$$

que denotamos simplemente por $\prod X_\alpha$ si no puede haber confusión sobre el conjunto de indexación. Por tanto $\prod X_\alpha$ es un conjunto de funciones definidas en el conjunto de indexación. En la práctica, el valor de $x \in \prod X_\alpha$ en α usualmente se denota x_α , en lugar de $x(\alpha)$, y x_α se conoce como la α -ésima **coordenada** de x . El espacio X_α es el α -ésimo **espacio factor**.

Ahora, si estamos interesados en tan solo un espacio factor, las funciones proyecciones nos permitirán quedarnos con solo es factor. La definición de estas funciones coincide con el concepto de funciones proyección en el análisis matemático real de funciones multivariadas.

Proyecciones

Definición 1.13. La función $\pi_\beta : \prod X_\alpha \mapsto X_\beta$, definida por $\pi_\beta(x) = x_\beta$, es llamada *función proyección* de $\prod X_\alpha$ sobre X_β , o simplemente, la β -ésima *función proyección*.

Si cada X_α es no vacío y el axioma de elección se supone, entonces la β -ésima función proyección manda $\prod X_\alpha$ en X_β . cabe mencionar que cada π_β es sobreyectiva.

Ahora supongamos que (X_α, τ_α) es un espacio topológico para cualquier $\alpha \in \Lambda$. Queremos definir una topología sobre $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ que sea al mismo tiempo suficientemente natural y controlable que una serie de teoremas de la forma «si cada X_α tiene la propiedad P , entonces también $\prod X_\alpha$ » sigan siendo verdaderos.

Si la naturalidad fuera el único requisito, basta con tomar como base para tal topología todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde $U_\alpha \in \tau_\alpha$, para cualquier $\alpha \in \Lambda$. De hecho, este procedimiento da una topología válida, llamada la *topología caja*, sobre $\prod X_\alpha$. Satisface nuestro requerimiento de naturalidad, pero no se usa mucho porque no es lo suficientemente manejable, teniendo una sobreabundancia de conjuntos abiertos. La definición (1.13) de la topología habitual utilizada en el espacio del producto rectifica esto al reducir drásticamente el número de elementos base.

Topología Tychonoff o topología producto

Definición 1.14. La **Topología Tychonoff o topología producto** sobre $\prod X_\alpha$ se obtiene al tomar como base para conjuntos abiertos, conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde

- a) U_α es abierto en X_α , para cada $\alpha \in \Lambda$,
- b) Para todas menos un número finito de coordenadas, $U_\alpha = X_\alpha$.

Observación. Podemos reemplazar a) por

- a)' $U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, donde para toda α , \mathcal{B}_α es una base fija para la topología de X_α .

También, cabe mencionar que el conjunto $\prod U_\alpha$, donde $U_\alpha = X_\alpha$ excepto por $\alpha \in$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, puede escribirse

$$\prod U_\alpha = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

Por tanto, la topología producto es precisamente aquella topología que tiene como una subbase la colección $\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda, U_\alpha \in \tau_\alpha\}$. De nuevo, los conjuntos U_α se pueden restringir a ser subbásicos de X_α .

En caso de que solo se trate de un número finito de espacios $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$, la topología sobre $\prod_{k=1}^n X_k$ coincide con la topología de caja, por lo que en aquellos casos en los que tengamos alguna intuición para empezar, la topología del producto siempre parecerá «natural».

1.3. Espacios métricos

La definición que tenemos de una topología admite estructuras que son, para la mayoría de los propósitos, inútiles. Sería de mucha más ayuda si parte de la estructura teórica de conjuntos de X se reflejara en su topología. Aparentemente, lo que se necesita es un requisito de que la topología en X contenga suficientes conjuntos abiertos para distinguir entre los puntos de X , de alguna manera. Esto es, asegurarnos de que los límites en el espacio sean únicos. Primero definimos la convergencia, otro concepto más sobre cercanía o similitud en observaciones.

Convergencia

Definición 1.15. Una sucesión (x_n) en un espacio topológico (X, τ) se dice que **converge** a $x \in X$, y escribimos $x_n \rightarrow x$, si y sólo si para cada vecindad U de x , existe algún entero positivo n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in U$. En este caso, decimos que (x_n) está **eventualmente** en U .

Ahora definiremos secuencialmente tipos de espacios que nos servirán para lograr el objetivo; límites únicos. Así, los muchos de los conceptos topológicos coincidirán con sus similares estudiados en el análisis matemático real. Esto porque al final los espacios que nos interesan vivirán dentro de espacios ya conocidos comúnmente.

Espacio T_0

Definición 1.16. Un espacio topológico (X, τ) es un **espacio T_0** si y sólo si siempre que x e y son puntos distintos en X , existe un conjunto abierto que contiene a uno pero no al otro.

El siguiente espacio nos ayuda para empezar con la propiedad de que los conjuntos unipuntuales son cerrados. Aunque no sea tan evidente en la definición, el teorema (1.8) proporciona esta afirmación.

Espacio T_1

Definición 1.17. Un espacio topológico (X, τ) es un **espacio T_1** si y sólo si cuando x e y son puntos distintos en X , hay alguna vecindad de cada uno que no contiene al otro.

Evidentemente, cada espacio T_1 es T_0 . Con estos espacios podemos trabajar de manera más cómoda los puntos que se encuentran en la frontera de un conjunto. Posteriormente podremos definir formalmente lo que son los límites, una vez que hayamos conseguido su unicidad.

Teorema 1.8. Las siguientes son equivalentes, para un espacio topológico (X, τ) :

- a) (X, τ) es T_1 ,
- b) cada conjunto unipuntual en X es cerrado,
- c) cada subconjunto de X es la intersección de conjuntos abiertos que lo contienen.

Demostración.

- a) \Rightarrow b): Si (X, τ) es T_1 y $x \in X$, entonces cualquier $y \neq x$ tiene una vecindad disjunta de $\{x\}$, así que $X \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto y por tanto $\{x\}$ es cerrado.
- b) \Rightarrow c): Si $A \subset X$, entonces A es la intersección de todos los conjuntos de la forma $X \setminus \{x\}$, para $x \notin A$, y cada uno de estos es abierto, dado que los conjuntos unipuntuales son cerrados.
- c) \Rightarrow a): Si (c) se cumple, entonces $\{x\}$ es la intersección de sus vecindades abiertas y así, para cualquier $y \neq x$, existe un conjunto abierto que contiene a x y no a y .

■

Finalmente, podemos definir los espacios que estábamos buscando.

Espacios *Hausdorff*

Definición 1.18. Un espacio topológico (X, τ) se llama **espacio de Hausdorff** si para cada par x, y de puntos distintos de X , existen conjuntos abiertos U y V de x e y , respectivamente, que son ajenos.

Todo espacio Hausdorff es T_1 . En particular, los espacios de Hausdorff son atractivos porque nos permiten separar dos puntos distintos con abiertos; es decir, los límites son únicos en estos espacios. Los espacios que trabajaremos son de Hausdorff.

Teorema 1.9. *Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio Hausdorff (X, τ) es cerrado.*

Demostración. Veamos que para cualquier $x_0 \in X$, $\{x_0\}$ es cerrado. Vamos a demostrar que el complemento, $X \setminus \{x_0\}$ es abierto. Sea $y \in X \setminus \{x_0\}$, entonces $y \neq x_0$. Como (X, τ) es de Hausdorff, existen abiertos ajenos, U y V de X tales que $x_0 \in U$ y $y \in V$. Así que $y \in V \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Con esto demostramos que el complemento es abierto.

Ahora, si $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_0\} \cup \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$ es unión finita de cerrados. Sabemos que la unión finita de cerrados es cerrada, con lo que se cumple el teorema. ■

Este teorema nos interesa porque trata de un número finito de puntos; que son los que se suelen trabajar.

Unicidad de límite

Teorema 1.10. *Si (X, τ) es Hausdorff, entonces una sucesión de X converge a lo más a un punto de X .*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de puntos de X y supongamos que x_n converge a dos puntos distintos x e y : Como (X, τ) es Hausdorff, existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Entonces hay alguna $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$, significa que $x_n \in U$ y también existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$ implica que $x_n \in V$. Esto significa que

$$n \geq \max\{n_1, n_2\} \implies x_n \in U \cap V.$$

Esto es una contradicción pues (X, τ) es Hausdorff. En conclusión, los límites sí son únicos. ■

Ya con la unicidad del límite asegurada, formalizamos el concepto del límite.

Límite

Definición 1.19. Si la sucesión x_n de puntos del espacio Hausdorff (X, τ) converge al punto $x \in X$, escribiremos $x_n \rightarrow x$, y diremos que x es el límite de la sucesión x_n .

El siguiente teorema es de interés porque usualmente trabajamos con coordenadas y también en subespacios.

Teorema 1.11.

- a) *Cualquier subespacio de un espacio Hausdorff es Hausdorff.*
- b) *Un espacio producto no vacío es Hausdorff si y sólo si cada factor es Hausdorff.*

Demostración. a) Si (X, τ) es Hausdorff y (A, τ') es un subespacio de (X, τ) , puntos distintos a y b en A tienen vecindades disjuntas U y V en (X, τ) y entonces $U \cap A$ y $V \cap A$ son vecindades ajenas de a y b en (A, τ') .

- b) Si X_α es un espacio Hausdorff, para cada $\alpha \in \Lambda$, y $x \neq y$ en $\prod X_\alpha$, entonces para alguna coordenada α , $x_\alpha \neq y_\alpha$, así que se pueden encontrar vecindades disjuntas U_α de x_α y V_α de y_α en X_α . Ahora, $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ y $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ son vecindades disjuntas de x e y , respectivamente, en $\prod X_\alpha$. ■

Un concepto de mucha utilidad será el de distancia, pues tiene que ver con la noción de cercanía. Para poder predecir datos, necesitamos saber qué tan cerca están de algún lugar. Asimismo, a veces hay formas que se ajustan exactamente a las características ideales de definir una topología, este es el caso cuando en el conjunto de interés se pueden medir distancias.

Espacio métrico

Definición 1.20. Un **espacio métrico** es un par ordenado (M, ρ) que consiste de un conjunto M junto con una función $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ que satisface que para $x, y, z \in M$:

- a) $\rho(x, y) \geq 0$,
- b) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
- c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- d) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ *desigualdad del triángulo.*

La función ρ se llama la **métrica** sobre M . Si se satisfacen todos los axiomas excepto b), llamamos a (M, ρ) un **espacio pseudométrico** y ρ es entonces una **pseudométrica**. Las funciones $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ se llaman **funciones de distancia**.

Cuando tenemos un conjunto de observaciones, estos pueden representarse dentro de algún espacio métrico, como veremos más adelante. Veremos también que para medir cercanías entre observaciones usaremos un tipo de vecindades muy particulares alrededor de estos puntos para hacer inferencias. La forma de estas vecindades varían acorde a la métrica o función distancia que hayamos definido.

Bola

Definición 1.21. Sea (M, ρ) un espacio métrico, $x \in M$. Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\},$$

llamada la **bola de radio ε centrada en x** .

Las bolas nos interesan porque la colección de todas ellas resulta ser una base para una topología. Ahora definimos la menor topología que contiene todas las bolas abiertas.

Topología métrica

Definición 1.22. Sea (M, ρ) un espacio métrico. Entonces, los conjuntos abiertos en M definidos por

$$\forall x \in E \in \tau_\rho : \exists B_\rho(x, \varepsilon) \subset E$$

forman una topología sobre M , llamada la **topología métrica τ_ρ** .

Para no perder formalidad, demostremos que, efectivamente, esta es una topología bien definida.

Teorema 1.12. *La colección de todas las bolas $B_\rho(x, \varepsilon)$ para $x \in X$ es, en efecto, una base para una topología sobre X .*

Demostración. Es claro que el conjunto de bolas abiertas cumple con la condición a) del teorema (1.5).

Sean $B_\rho(x_1, \varepsilon_1)$ y $B_\rho(x_2, \varepsilon_2)$ dos bolas abiertas cuya intersección es no vacía. Entonces tomemos $y \in B_\rho(x_1, \varepsilon_1) \cap B_\rho(x_2, \varepsilon_2)$. Así,

$$\exists \delta_1 > 0 : B_\rho(y, \delta_1) \subseteq B_\rho(x_1, \varepsilon_1) \quad \wedge \quad \exists \delta_2 > 0 : B_\rho(y, \delta_2) \subseteq B_\rho(x_2, \varepsilon_2).$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Por consiguiente

$$B_\rho(y, \delta) \subseteq B_\rho(y, \delta_1) \subset B_\rho(x_1, \varepsilon_1) \quad \wedge \quad B_\rho(y, \delta) \subseteq B_\rho(y, \delta_2) \subset B_\rho(x_2, \varepsilon_2).$$

Esto nos asegura que $B_\rho(y, \delta) \subseteq B_\rho(x_1, \varepsilon_1) \cap B_\rho(x_2, \varepsilon_2)$. ■

De igual forma, ahora toca definir cuáles son los conjuntos abiertos dentro de esta nueva topología.

Definición 1.23. Un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por ρ , si y sólo si para cada $y \in U$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_\rho(y, \delta) \subset U$.

Con la topología métrica tenemos cómo obtener una topología a través de una métrica. Ahora bien, con los espacios metrizable tendremos el recíproco.

Espacios metrizable

Definición 1.24. Siempre que (X, τ) es un espacio topológico cuya topología es una topología métrica τ_ρ para alguna métrica ρ sobre X , llamamos a (X, τ) un espacio topológico **metrizable**.

Notemos la distinción: un «espacio metrizable» es un espacio con una topología que resulta provenir de alguna métrica, un «espacio métrico» es un espacio con una métrica. Todo espacio métrico (X, ρ) determina un espacio metrizable (X, τ_ρ) y dado un espacio metrizable (X, τ) , se puede encontrar tantas métricas sobre X tales que $\tau_\rho = \tau$.

Observación. No todo espacio topológico es metrizable.

Pero nosotros vamos a trabajar con espacios Hausdorff pues estos ya cumplen con una serie de propiedades deseables que ya demostramos.

Lema 1.5. *Todo espacio métrico es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x \neq y$ y $r = \frac{\rho(x, y)}{2} > 0$. Debemos demostrar que

$$U_\rho(x, r) \cap U_\rho(y, r) = \emptyset.$$

Si $z \in U_\rho(x, r) \cap U_\rho(y, r)$, entonces $\rho(z, x) < r$ y $\rho(z, y) < r$. Así que

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < r + r = 2r = \rho(x, y),$$

lo cual es una contradicción. ■

Al momento de hacer inferencias sobre conjuntos de observaciones, necesitaremos la noción de conjuntos acotados junto con la de cerrados. Esto debido a que usaremos funciones definidas como distancias, ya sea para medir distancias entre puntos, entre un punto y un conjunto, o bien entre conjuntos pues un tema central del análisis topológico de datos es la similitud entre observaciones. Del análisis matemático real, sabemos, por el teorema del óptimo cerrado, que una función continua alcanza sus máximos y sus mínimos si está definida sobre un intervalo cerrado y acotado. En el cálculo vectorial esto se generaliza a \mathbb{R}^n . Pues nosotros usaremos la generalización de esto, en conjuntos que son tanto cerrados como acotados. Ya se empieza a vislumbrar la necesidad y conveniencia de los espacios métricos.

Conjuntos acotados

Definición 1.25. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Un subconjunto A de X se dice que está **acotado** si existe algún número m tal que

$$\rho(a, b) \leq m$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Si A es un conjunto acotado y no vacío, definimos el **diámetro** de A como

$$\text{diám}(A) = \sup\{\rho(a, b) : a, b \in A\}.$$

Los conjuntos acotados nos sirven para tener un control sobre las distancias pues muchas veces pueden crecer indefinidamente. Entonces haremos uso de la siguiente métrica.

Métrica acotada

Teorema 1.13. Sea (X, ρ) un espacio métrico. Se define $\bar{\rho} : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ como

$$\bar{\rho}(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}.$$

Entonces $\bar{\rho}$ es una métrica que induce la misma topología que ρ . La métrica $\bar{\rho}$ se denomina **métrica acotada** correspondiente a ρ .

Demostración. a) $\bar{\rho}(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\} \geq 0$.

b) $\bar{\rho}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

c) $\bar{\rho}(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\} = \min\{\rho(y, x), 1\} = \bar{\rho}(y, x)$.

d) Si $\rho(x, y) \geq 1$ o $\rho(y, z) \geq 1$, entonces $\bar{\rho}(x, y) + \bar{\rho}(y, z) \geq 1 \geq \bar{\rho}(x, z)$. Si $\rho(x, y) < 1$ y $\rho(y, z) < 1$, entonces $\bar{\rho}(x, y) = \rho(x, y)$ y $\bar{\rho}(y, z) = \rho(y, z)$ y

$$\bar{\rho}(x, z) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Entonces sí es una métrica. Si $r \leq 1$, entonces $B_{\bar{\rho}}(x, r) = B_{\rho}(x, r)$. Es decir, las bolas pequeñas coinciden y es lo que nos importa para la topología, los radios pequeños. ■

Dado $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define la **norma** de \vec{x} como

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

y la **distancia euclidiana** d_2 sobre \mathbb{R}^n como

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Observación. En \mathbb{R}^2 , los elementos básicos son las regiones circulares, en \mathbb{R}^3 , los elementos básicos son regiones sólidas esféricas. La topología inducida por d_2 es la usual.

Métricas equivalentes

Definición 1.26. Dos métricas ρ_1 y ρ_2 sobre el mismo conjunto M se dice que son **equivalentes** si ambas generan la misma topología sobre M .

Nos interesan las métricas equivalentes porque nos permiten cambiar la manera de medir sin cambiar la estructura topológica.

1.4. Subespacios y continuidad

Hasta el momento toda la teoría topológica ha sido desarrollada para un conjunto universal. No obstante, en muchos escenarios no estamos interesados en estudiar todo el espacio, sino en algunas partes de éste. Es por esto que ahora restringimos la topología a algún subconjunto del conjunto universal. Un subconjunto de un espacio topológico hereda una topología propia, de manera obvia.

La topología de subespacio

Definición 1.27. Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subset X$, la colección $\tau' = \{G \cap A \mid G \in \tau\}$ es una topología para A llamada la **topología relativa** para A . El hecho de que a un subconjunto de X se le dé esta topología se indica al referirse a él como un **subespacio** de X .

Lema 1.6. Si A es un subespacio de un espacio topológico (X, τ) , y si \mathcal{B} es una base para (X, τ) , entonces $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ es una base para (A, τ') .

Demostración. Sea U un abierto de (X, τ) , entonces $U \cap A$ es abierto en (A, τ') . Si $x \in U \cap A$, entonces existe un básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Así que $B \cap A$ es tal que

$$x \in B \cap A \subseteq U \cap A.$$

■

Al tener un espacio topológico y un subespacio topológico, es necesario hacer distinción entre los abiertos de uno y otro. La siguiente definición nos especifica esta diferencia.

Definición 1.28. Si (A, τ') es un subespacio de un espacio topológico (X, τ) , entonces $H \subset A$ es abierto en (A, τ') si y sólo si $H = G \cap A$, donde G es abierto en (X, τ) .

El siguiente lema nos indica cuándo un conjunto es abierto tanto en el subespacio como en el espacio.

Lema 1.7. Sea (Y, τ') un subespacio de (X, τ) . Si U es abierto en (Y, τ') e Y es abierto en (X, τ) , entonces U es abierto en X .

Demostración. Si U es abierto en (Y, τ') , entonces $U = Y \cap V$, donde V es abierto en (X, τ) . Como Y y V son abiertos en (X, τ) , entonces $U = Y \cap V$ es abierto en X . ■

De manera análoga, se definen los cerrados en un subespacio.

Definición 1.29. Si (A, τ') es un subespacio de un espacio topológico (X, τ) , entonces $F \subset A$ es cerrado en (A, τ') si y sólo si $F = K \cap A$ donde K es cerrado en (X, τ) .

Observación. Un conjunto A que es cerrado en el subespacio (Y, τ') puede ser cerrado o no en el espacio más grande (X, τ) .

Teorema 1.14. Sea (Y, τ') un subespacio de (X, τ) . Si A es cerrado en (Y, τ') e Y es cerrado en (X, τ) , entonces A es cerrado en (X, τ) .

Demostración. Tenemos que $A = K \cap Y$ donde K es cerrado en (X, τ) e Y es cerrado en (X, τ) . Así pues A es la intersección de dos cerrados, en virtud del teorema (1.1), A es cerrado en (X, τ) . ■

Ahora toca, naturalmente, asegurar que todos los conceptos previos se cumplan también en subespacios.

Teorema 1.15. Sean (Y, τ') un subespacio de (X, τ) y A un subconjunto de Y . Denotemos por \bar{A} la clausura de A en (X, τ) . Entonces la clausura de A en (Y, τ') es $\bar{A} \cap Y$.

Demostración. Debemos mostrar que $\text{Cl}_{(Y, \tau')}(A) = \bar{A} \cap Y$.

- (i) Veamos que $\text{Cl}_{(Y, \tau')}(A) \subseteq \bar{A} \cap Y$. Notemos que $\bar{A} \cap Y$ es cerrado en (Y, τ') y además $A \subseteq \bar{A} \cap Y$. Entonces $\text{Cl}_{(Y, \tau')}(A) \subseteq \bar{A} \cap Y$.
- (ii) Veamos que $\bar{A} \cap Y \subseteq \text{Cl}_{(Y, \tau')}(A)$. Como $\text{Cl}_{(Y, \tau')}(A)$ es cerrado en (Y, τ') ,

$$\text{Cl}_{(Y, \tau')}(A) = F \cap Y$$

donde F es cerrado en (X, τ) . Notemos que $A \subseteq F$, así que $\bar{A} \subseteq F$. Pero esto significa que $\bar{A} \cap Y \subseteq F \cap Y = \text{Cl}_{(Y, \tau')}(A)$. ■

Así como con los espacios topológicos, con los espacios métricos también nos servirá estudiar una estructura con una métrica en un espacio local.

Observación. Si (A, τ') es un subespacio de un espacio topológico (X, τ) y ρ es una métrica para X , entonces la restricción de ρ a $A \times A$ es una métrica para la topología de A .

La continuidad nos permitirá relacionar dos espacios topológicos. Más adelante veremos otras formas de relacionar espacios de interés para nuestras observaciones que sean menos restrictivas y más convenientes. Pero para llegar a eso necesitamos definir el concepto formal de una función continua.

Funciones continuas

Definición 1.30. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y sea

$$f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y).$$

Entonces f es **continua** en $x_0 \in X$ si y sólo si para cada vecindad V de $f(x_0)$ en (Y, τ_Y) , existe una vecindad U de x_0 en (X, τ_X) tal que $f(U) \subset V$. Decimos que f es **continua sobre** (X, τ_X) si y sólo si f es continua en cada $x_0 \in X$.

Intuitivamente, la noción de continuidad en espacios topológicos coincide con la noción de continuidad en \mathbb{R}^n . El puente entre estas dos formas de continuidad está dado por la continuidad en espacios métricos.

Equivalentemente, tendremos las siguientes afirmaciones. Este teorema se usa con más frecuencia para verificar la continuidad «global» que la alternativa, es decir, verificar la continuidad en cada punto de X individualmente.

Las equivalencias a) y b) resultan cómodas porque, como veremos, en algunos casos se debe trabajar en conjuntos abiertos y en otros en conjuntos cerrados. La última equivalencia no se usa mucho pero aún así se incluye pues no es difícil demostrarla a partir de las anteriores.

Teorema 1.16. Si (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son espacios topológicos y

$$f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y),$$

entonces las siguientes son equivalentes:

- a) f es continua,
- b) para cada conjunto abierto H en (Y, τ_Y) , $f^{-1}(H)$ es abierto en (X, τ_X) ,
- c) para cada conjunto cerrado K en (Y, τ_Y) , $f^{-1}(K)$ es cerrado en (X, τ_X) ,
- d) para cada $E \subset X$, $f(\text{Cl}_{(X, \tau_X)}(E)) \subset \text{Cl}_{(Y, \tau_Y)}(f(E))$.

Demostración.

- a) \Rightarrow b): Si H es abierto en (Y, τ_Y) , entonces para cualquier $x \in f^{-1}(H)$, H es una vecindad de $f(x)$. Por consiguiente, por la continuidad de f , hay una vecindad V de x tal que $f(V) \subset H$; es decir, $V \subset f^{-1}(H)$. Así, $f^{-1}(H)$ contiene una vecindad de cada uno de sus puntos y es por tanto abierta.
- b) \Rightarrow c): Si K es cerrado en (Y, τ_Y) , entonces $f^{-1}(Y \setminus K)$ es abierto en (X, τ_X) , por la parte (b). En consecuencia, dado que $f^{-1}(K) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus K)$, $f^{-1}(K)$ es cerrado en (X, τ_X) .
- c) \Rightarrow d): Sea K cualquier conjunto cerrado en (Y, τ_Y) que contiene a $f(E)$. Por la parte (c), $f^{-1}(K)$ es un conjunto cerrado en X que contiene a E . Así,

$$\text{Cl}_{(X, \tau_X)}(E) \subset f^{-1}(K),$$

y se sigue que $f(\text{Cl}_{(X, \tau_X)}(E)) \subset K$. Ya que esto es cierto para cualquier conjunto cerrado K que contiene a E , tenemos

$$f(\text{Cl}_{(X, \tau_X)}(E)) \subset \text{Cl}_{(Y, \tau_Y)}(f(E)).$$

- d) \Rightarrow a): Sea $x \in X$ y sea V una vecindad abierta de $f(x)$. Fijemos $E = X \setminus f^{-1}(V)$ y sea $U = X \setminus \text{Cl}_{(X, \tau_X)}(E)$. Es fácil verificar que, como $f(\text{Cl}_{(X, \tau_X)}(E)) \subset \text{Cl}_{(Y, \tau_Y)}(f(E))$, tenemos $x \in U$. Es aún más claro que $f(U) \subset V$. Por tanto, f es continua en x . ■

Observación. La continuidad de una función depende no solo de la propia función f , sino también de las topologías de su dominio y codominio.

Observación. Si la topología del codominio Y está dada por una base \mathcal{B} , entonces para probar la continuidad de f es suficiente mostrar que la imagen inversa de cada *elemento básico* es abierta.

Observación. Si la topología del codominio τ_Y está dada por una subbase \mathcal{C} , para probar la continuidad de f será suficiente demostrar que la imagen inversa de cada elemento de la subbase es abierta.

Por ejemplo, dada una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la ε - δ definición de continuidad es equivalente. Dados $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, supongamos que $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua en x_0 , entonces el intervalo

$$(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

resulta ser abierto en \mathbb{R} con su topología usual. Ahora, $f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$ es abierto en el dominio, o bien, hay un $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 \in (a, b) \subset f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)).$$

Tomando $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$,

$$|x - x_0| < \delta \implies x \in (a, b) \implies f(x) \in f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)),$$

o $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Observación. La noción de continuidad para funciones:

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ curvas en el plano

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ curvas en el espacio

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ funciones de dos variables

$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ funciones de tres variables

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ campos vectoriales en el plano

es equivalente.

Además, las funciones constantes, y la inclusión $A \subset X \hookrightarrow X$ son continuas.

Teorema 1.17. Si (X, τ_X) , (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) son espacios topológicos y

$$f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y) \quad \wedge \quad g : (Y, \tau_Y) \mapsto (Z, \tau_Z)$$

son continuas, entonces $g \circ f : (X, \tau_X) \mapsto (Z, \tau_Z)$ es continua.

Demostración. Si $H \in \tau_Z$, entonces $g^{-1}(H) \in \tau_Y$, por la continuidad de g . Así, por la continuidad de f , $f^{-1}(g^{-1}(H)) = (g \circ f)^{-1}(H) \in \tau_X$. Por tanto, $g \circ f$ es continua. ■

A veces queremos trabajar en conjuntos más pequeños, pues no siempre tenemos observaciones en todo el espacio.

Restricción del dominio

Definición 1.31. Si $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ y $A \subset X$, usaremos $f|_A$ para denotar la función de (A, τ') en (Y, τ_Y) definida como $f|_A(a) = f(a)I_A(a)$.

En esta restricción, la continuidad se sigue cumpliendo.

Teorema 1.18. Si $A \subset X$ y $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ es continua, entonces

$$f|_A : (A, \tau') \mapsto (Y, \tau_Y)$$

es continua.

Demostración. Si $H \in \tau_Y$, entonces $(f|_A)^{-1}(H) = f^{-1}(H) \cap A \in \tau'$. ■

La siguiente función se usa cuando no estamos interesados en todo el codominio, solo una parte de él. A la par, también podemos estudiar el comportamiento de la función en un ambiente más general. Así, en ambos casos, la continuidad se seguirá cumpliendo.

Restricción o extensión del codominio

Teorema 1.19. Sea $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ continua. Si (Z, τ') es un subespacio de (Y, τ_Y) que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g : (X, \tau_X) \mapsto (Z, \tau')$ obtenida al restringir el rango de f , es continua. Si (Z, τ') es un subespacio que contiene a (Y, τ_Y) como subespacio, entonces la función $h : (X, \tau_X) \mapsto (Z, \tau')$, obtenida al extender el codominio de f , es continua.

Demostración. Si B es abierto en Z , entonces $B = Z \cap U$, donde U es abierto en Z . Notemos que $g^{-1}(B) = f^{-1}(U)$ es abierto en X .

Ahora notemos que $h = j \circ f$, donde $j : (Y, \tau_Y) \hookrightarrow (Z, \tau')$ es la inclusión. Entonces h es composición de funciones continuas. ■

El siguiente teorema nos permitirá preservar la continuidad global en todo el conjunto universal cuando la continuidad se da en regiones del conjunto universal.

Formulación local de continuidad

Teorema 1.20. La función $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f|_{U_\alpha}$ es continua para cada α .

Demostración. Si $V \in \tau_Y$, entonces para cada α ,

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|_{U_\alpha})^{-1}(V) \in \tau_X.$$

Notemos

$$f^{-1}(V) = \bigcup f^{-1}(V) \cap U_\alpha$$

es unión de conjuntos abiertos. ■

El siguiente lema nos permite pegar dos funciones continuas para quedarnos con una función continua.

Lema 1.8. (del pegado) Si $X = A \cup B$, donde A y B son ambos abiertos (o ambos cerrados) en (X, τ_X) , y si $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ es una función tal que ambas $f|_A$ y $f|_B$ son continuas, entonces f es continua.

Demostración. Supongamos que A y B son abiertos. Si $H \in \tau_Y$, entonces

$$f^{-1}(H) \in \tau_X,$$

dado que $f^{-1}(H) = (f|_A)^{-1}(H) \cup (f|_B)^{-1}(H)$ y cada uno de los anteriores son abiertos en un subespacio abierto de (X, τ_X) y por tanto abierto en (X, τ_X) . La demostración es similar si A y B son cerrados. ■

Nuevamente, hacemos coincidir lo estudiado en el análisis matemático real con nuestros conceptos.

Teorema 1.21. Una función $f : X \mapsto \prod X_\alpha$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.

Demostración. La necesidad de la condición de composición es clara ya que la composición de funciones continuas es continua.

A la inversa, supongamos que $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Los conjuntos de la forma $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ y $U_\alpha \in \tau_\alpha$, forman una subbase para la topología sobre $\prod X_\alpha$. Pero $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$. Así, las imágenes inversas bajo f de estos conjuntos abiertos subbásicos son abiertas en (X, τ_X) , por la continuidad de $\pi_\alpha \circ f$. Esto es suficiente para mostrar que f es continua. ■

Continuidad en espacios métricos

Teorema 1.22. Si (M, ρ) y (N, σ) son espacios métricos, una función

$$f : (M, \rho) \mapsto (N, \sigma)$$

es **continua en** $x \in M$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $y \in N$

$$\rho(x, y) < \delta \implies \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Demostración. Si f es continua en x , y V es un conjunto abierto en N que contiene a $f(x)$, entonces $B_\sigma(f(x), \varepsilon) \subset V$ para algún $\varepsilon > 0$, por la definición de conjunto abierto. Pero, por la continuidad de f , hay un $\delta > 0$ tal que $f(B_\rho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$. Entonces $U = B_\rho(x, \delta)$ es un conjunto abierto que contiene a x y $f(U) \subset V$.

A la inversa, supongamos que para cada abierto V que contiene a $f(x)$ existe un abierto U que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. Si $\varepsilon > 0$ está dada, entonces

$$B_\sigma(f(x), \varepsilon) = V$$

es un conjunto abierto que contiene a $f(x)$. Así, existe un conjunto abierto U que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. Pero como $x \in U$ y U es abierto, $B_\rho(x, \delta) \subset U$ para algún $\delta > 0$. Entonces $f(B_\rho(x, \delta)) \subset B_\sigma(f(x), \varepsilon)$, de forma que f es continua en x . ■

Continuamos con el estudio de aproximaciones con el siguiente lema y el teorema (1.23).

Lema 1.9. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x , entonces $x \in \overline{A}$. El recíproco es cierto si X es metrizable.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de x . Por la convergencia de la sucesión

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies x_n \in U.$$

Pero como esta sucesión está conformada por términos de A , $x_n \in U \cap A$. Por tanto, $x \in \overline{A}$ porque cualquier vecindad abierta de x intersecta a A .

El regreso es que si $x \in \overline{A}$, entonces existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Consideramos la vecindad $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ de x . Como el radio de las bolas de la sucesión converge a cero, la sucesión converge a x mismo. Así, $x_n \in A$ eventualmente. ■

Continuidad por sucesiones

Teorema 1.23. *Sea $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ una función entre los espacios topológicos (X, τ_X) y (Y, τ_Y) . Si la función f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \rightarrow x$ en X , la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es metrizable.*

Demostración. Considerando una vecindad V de $f(x)$, por la continuidad de f , sabemos que $f^{-1}(V)$ es abierto en (X, τ_X) y $x \in f^{-1}(V)$. Ahora, por convergencia,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies x_n \in f^{-1}(V).$$

Pero esto significa que $f(x_n) \in V$. Esto demuestra que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Para el recíproco veamos que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $x \in \overline{A}$, debemos demostrar que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Entonces, existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Por hipótesis, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Como $f(x_n) \subseteq A$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. ■

Con esto ya sabemos que podemos aproximar imágenes de puntos límite siempre que tengamos continuidad. Esto es una propiedad importante en los espacios métricos, poder aproximar puntos usando radios apropiadamente pequeños.

Primer axioma de numerabilidad

Definición 1.32. Un espacio topológico (X, τ) satisface el **primer axioma de numerabilidad** si y sólo si cada $x \in X$ tiene una base de vecindad numerable.

Observación. Por lo tanto, todo espacio métrico satisface el primer axioma de numerabilidad, pero el recíproco no es cierto.

Convergencia uniforme

Definición 1.33. Sea $f_n : X \mapsto (Y, \rho)$ una sucesión de funciones del conjunto X al espacio métrico (Y, ρ) . Diremos que la sucesión (f_n) **converge uniformemente** a la función $f : X \mapsto (Y, \rho)$ si, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ y todo $x \in X$.

1.5. Homeomorfismos

Quando pasamos del dominio X a la imagen Y de X bajo una función continua f , perdemos información en dos maneras. La primera es de teoría conjuntista: Y tendrá menos puntos que X . La segunda es topológica: Y podría tener menos conjuntos abiertos que X en el sentido de que cada conjunto abierto H en Y es la imagen de un conjunto abierto en X , pero bien podrían haber conjuntos abiertos U en X tales que $f(U)$ no es abierto en Y . Las funciones que preservan a X de manera conjuntista y topológica son homeomorfismos.

Homeomorfismos

Definición 1.34. Una función $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ es un **homeomorfismo** si y sólo si f es biyectiva, continua y f^{-1} es también continua. En este caso, decimos que (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son **homeomorfos**. Si f es todo menos sobre, la llamamos un **encaje** de (X, τ_X) en (Y, τ_Y) , y decimos que (X, τ_X) está **encajado** en (Y, τ_Y) por f . Por lo tanto, (X, τ_X) está encajado en (Y, τ_Y) por f si y solo si f es un homeomorfismo entre (X, τ_X) y algún subespacio de (Y, τ_Y) .

Decimos que dos espacios homeomorfos son, topológicamente hablando, los mismos. Cuando analicemos un conjunto de datos, estos tendrán alguna forma y vamos a estudiar la estructura de esa figura. Las propiedades topológicas que cumpla este conjunto de datos serán las mismas que un espacio homeomorfo y, por lo general, será un espacio más fácil de manejar.

Observación. Un homeomorfismo es una biyección $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ tal que $f(U)$ es abierto si y sólo si U es abierto.

Observación. Sea $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo. Cualquier propiedad de (X, τ_X) que se exprese completamente en términos de la topología τ_X nos da, vía la correspondencia f , la propiedad correspondiente para el espacio (Y, τ_Y) . Tal propiedad de (X, τ_X) se denomina **propiedad topológica de (X, τ_X)** .

Cabe destacar que los homeomorfismos no son propiedades métricas, pues una función biyectiva continua entre espacios metrizable sí cambian la métrica entre estos.

1.6. Geometría simplicial

La descomposición en pedazos simples de datos es una forma útil de representar un espacio topológico. Esta descomposición califica para llamarse compleja si las piezas son topológicamente simples y sus intersecciones comunes son piezas de menor dimensión del mismo tipo. Aún con estos requisitos, es posible gozar de una gran libertad con estas representaciones. En esta sección, presentamos los complejos simpliciales en sus formas geométricas y combinatorias.

Complejo simplicial

Definición 1.35. Sea V un conjunto finito no vacío, sus elementos serán llamados **vértices**. Un **complejo simplicial** K sobre V es una colección de subconjuntos no vacíos de V tal que:

1. para cada vértice $v \in V$, el singular $\{v\} \in K$, y
2. si $\tau \in K$ y $\sigma \subset \tau$, entonces $\sigma \in K$.

Los subconjuntos no vacíos de un complejo simplicial K serán llamados **simplejos** de K .

A pesar de que esta definición es combinatoria, podemos representar geométricamente los complejos simpliciales. A los complejos simpliciales les vamos a dar una topología. El conjunto V finito corresponde a nuestro conjunto de datos a estudiar.

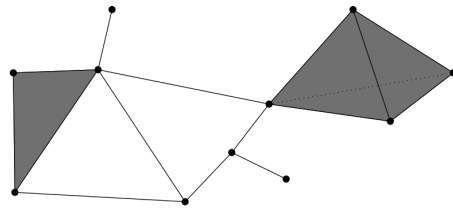


Figura 1: Complejo simplicial

Dimensión de un simplejo

Definición 1.36. La **dimensión** de un simplejo σ de un complejo simplicial K se define como

$$\dim(\sigma) = \#\sigma - 1,$$

donde $\#\sigma$ denota la cardinalidad del número de vértices contenidos en σ .

Así, un 0-simplejo corresponde a un solo punto, un 1-simplejo es un segmento entre dos puntos, un 2-simplejo es un triángulo y un 3-simplejo es un tetraedro, por mencionar algunos ejemplos.

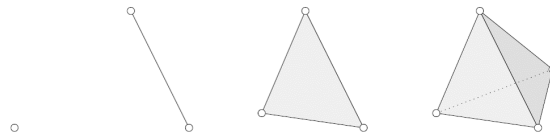


Figura 2: Simplejos

Observación. Todos los singulares $\{v\}$ están en el complejo simplicial K y tienen dimensión cero; todas las parejas $\{v, v'\}$ que están en K tienen dimensión uno; y así sucesivamente.

Ya que sabemos calcular la dimensión de cada posible simplejo, podemos definir la dimensión de un complejo simplicial pues este consta de varios simplejos.

Dimensión de un complejo simplicial

Definición 1.37. La **dimensión** de un complejo simplicial K se define como la dimensión máxima entre sus simplejos; es decir,

$$\dim(K) = \text{máx}\{\dim(\sigma) : \sigma \in K\}.$$

Denotamos por K_i al conjunto de todos los simplejos i -dimensionales en K ; notemos que, por (1) de la definición, $K_0 = V$.

Sea $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

1. $K = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$ es un complejo simplicial sobre V .
2. $K = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ es un complejo simplicial sobre V .
3. $K' = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$ no es un complejo simplicial sobre V , pues $\{x_1, x_2, x_3\} \in K'$, $\{x_1, x_3\} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$ pero $\{x_1, x_3\} \notin K'$.

Una **gráfica** finita, no dirigida, simple es una pareja $G = (V, E)$ que consiste de un conjunto finito V cuyos elementos son llamados vértices y un conjunto $E \subset V \times V$ de parejas de vértices distintos, llamadas **aristas**. Toda gráfica forma un complejo simplicial

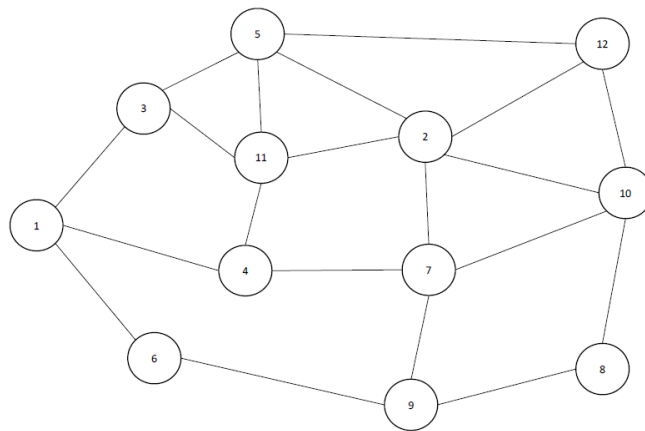


Figura 3: Gráfica

1-dimensional K con $V = K_0$ y $E = K_1$.

Para $k \in \mathbb{Z}_+$, el k -**simplejo sólido** es el complejo simplicial $\Delta(k)$ definido sobre el conjunto de vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ cuyos simplejos son *todos* los posibles subconjuntos no vacíos de vértices.

Para $k \in \mathbb{N}$, el k -**simplejo hueco**, denotado por $\partial\Delta(k)$, se define como el k -simplejo sólido excepto que omitimos al único simplejo de mayor dimensión $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Notemos que $\partial\Delta(k)$ tiene dimensión $k - 1$.

Caras

Definición 1.38. Dados dos simplejos σ y τ de un complejo simplicial K , decimos que σ es una **cara** de τ , y lo denotamos por $\sigma \leq \tau$, si todo vértice de σ es también un vértice de τ . Dado un par $\sigma \leq \tau$ de simplejos de un complejo simplicial K , la diferencia $\dim(\tau) - \dim(\sigma)$ es llamada la **codimensión** de σ como una cara de τ ; notemos que la codimensión es un entero no negativo.

La siguiente definición es una analogía de un subespacio topológico para complejos simpliciales.

Subcomplejos

Definición 1.39. Sea K un complejo simplicial. Un subcomplejo $L \subset K$ de simplejos es llamado un **subcomplejo** de K si cumple la siguiente propiedad: para cada simplejo $\tau \in L$, si σ es una cara de τ en K , entonces σ también está en L .

Observación. Para un subcomplejo $L \subset K$, no es necesario que cada vértice de K sea un vértice de L .

Cada k -simplejo hueco $\partial\Delta(k)$ es un subcomplejo del correspondiente k -simplejo sólido $\Delta(k)$; cada vértice de un complejo simplicial dado es un subcomplejo.

Dada la definición de subcomplejo, no cualquier subconjunto de un complejo simplicial es un subcomplejo. Si de un triángulo relleno con vértices y aristas tomamos solamente las aristas, este subconjunto no es un subcomplejo. Una manera de encontrar subcomplejos es fijarse en todos los simplejos que forman al complejo simplicial, se toman todos los simplejos que sean más pequeños hasta que no se encuentren más simplejos más pequeños. Esto es, en realidad, la definición de clausura de simplejos.

Clausura

Definición 1.40. La **clausura** de una colección de simplejos K' en un complejo simplicial K se define como el menor subcomplejo $L \subset K$ tal que $K' \subset L$.

La clausura de una colección de simplejos es análoga a la cerradura de un conjunto en un espacio topológico. La idea es agregar los puntos suficientes para volverlos cerrados.

Observación. Una colección no vacía $K' \subset K$ de simplejos forman un subcomplejo si y sólo si coincide con su clausura. La clausura de una colección dada K' de simplejos puede ser mucho más grande que K' .

Es conveniente reemplazar el conjunto de puntos de datos a analizar con una familia de complejos simpliciales. Esto convierte el conjunto de datos en objetos topológicos globales que ya podemos estudiar dada toda la teoría desarrollada previamente.

Filtraciones

Definición 1.41. Sea K un complejo simplicial. Una **filtración** de K de **longitud** n es una sucesión anidada de subcomplejos de la forma

$$F_1K \subsetneq F_2K \subsetneq \cdots \subsetneq F_{n-1}K \subsetneq F_nK = K.$$

Observación. Las dimensiones de los subcomplejos intermedios F_iK no son necesariamente restringidos por i . La condición que $F_iK \neq F_{i+1}K$ es necesaria para que la noción de longitud esté bien definida, esto implica que sí se agreguen simplejos en cada subcomplejo.

Hasta el momento hemos visto complejos simpliciales en su versión combinatoria o conjuntista. No obstante, nos interesa su geometría o estructura topológica.

Simplejo geométrico

Definición 1.42. El **simplejo geométrico** generado por una colección de puntos $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es el subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n definido por

$$\left\{ \sum_{i=0}^k t_i \vec{x}_i : t_i \geq 0 \wedge \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

Como los coeficientes son no negativos y suman 1 pues, en particular, $t_i \in [0, 1]$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Una combinación lineal definida de esta manera es una combinación convexa.

Envolvente convexa

Definición 1.43. Dado un conjunto de puntos $\{\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, la **envolvente convexa** de $\{\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_m\}$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de $\{\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_m\}$.

Observación. La envolvente convexa es la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen a $\{\vec{p}_0, \dots, \vec{p}_m\}$.

Ahora veamos la forma en que nos gusta que estén los puntos.

Puntos afinamente independientes

Definición 1.44. Decimos que los puntos $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ son **afinamente independientes** si la colección de vectores

$$\{\vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{x}_2 - \vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k - \vec{x}_0\}$$

son linealmente independientes.

Observación. Puede haber, a lo más, $n + 1$ puntos afinamente independientes en \mathbb{R}^n ; por ejemplo, los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n .

Ya estamos listos para definir subespacios del espacio euclideo definidos en términos de simplejos de complejos simpliciales.

Realización geométrica

Definición 1.45. Sea $\phi : K_0 \mapsto \mathbb{R}^n$ una función que envía los vértices de K a puntos de \mathbb{R}^n . La **realización geométrica** de K con respecto a ϕ es la unión

$$|K|_\phi = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|_\phi,$$

donde para cada $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ en K , el conjunto $|\sigma|_\phi \subset \mathbb{R}^n$ es el simplejo geométrico generado por los puntos $\{\phi(v_0), \dots, \phi(v_k)\}$.

Lo que la realización geométrica de un complejo simplicial hace es representar visualmente al complejo en \mathbb{R}^n .

Observación. Si $\phi : K_0 \mapsto \mathbb{R}^n$ es una función constante, por ejemplo que envía cada vértice al origen, entonces el espacio topológico $|K_0|_\phi \subset \mathbb{R}^n$ puede no ser interesante y no estar relacionado con K .

El caso de la observación anterior se puede dar porque a la función ϕ no la condicionamos con ninguna restricción. Por ejemplo, se pueden mandar todos los vértices al origen $\mathbf{0}$, con lo cual perderíamos toda la información. La falta de inyectividad provoca que se pueda mandar a más de un vértice al mismo punto. Si esto ocurre, perdemos información invariamente. Entonces, si no queremos perder información, pediremos que ϕ sea un encaje afín. Básicamente, esto significará que la realización geométrica, junto con su topología, no dependerá de ϕ . Esto es conveniente pues solamente queremos que ϕ sea el puente hacia el espacio euclideo, no que deforme al complejo simplicial.

Encaje afín

Definición 1.46. Decimos que $\phi : K_0 \mapsto \mathbb{R}^n$ es un **encaje afín** de K en \mathbb{R}^n si ϕ es inyectiva y si su imagen $\phi(K_0)$ es afinamente independiente.

De igual forma, pedimos que la imagen de ϕ sea afinamente independiente para no perder información. Si no fuera afinamente independiente podría mandar tres vértices a puntos colineales.

Como existen muchos encajes afines; es decir, hay más de una forma de mandar los vértices con una función inyectiva de manera que la imagen sea un conjunto afinamente independiente, pues geoméricamente tendríamos distintas figuras para un mismo complejo. No obstante, topológicamente, estas formas siguen siendo la misma. El teorema (1.24) asegura esto; las realizaciones geométricas son la misma figura topológica.

Teorema 1.24. Para cualesquiera dos encajes afines $\phi, \psi : K_0 \mapsto \mathbb{R}^n$, existe un homeomorfismo $|K|_\phi \simeq |K|_\psi$ entre las correspondientes realizaciones geométricas.

Demostración. Consideramos los conjuntos $\{\phi(x_0), \dots, \phi(x_k)\}$ y $\{\psi(x_0), \dots, \psi(x_k)\}$. Por definición, estos conjuntos son afinamente independientes; es decir, los conjuntos

$$B = \{\phi(x_1) - \phi(x_0), \phi(x_2) - \phi(x_0), \dots, \phi(x_k) - \phi(x_0)\}$$

$$B' = \{\psi(x_1) - \psi(x_0), \psi(x_2) - \psi(x_0), \dots, \psi(x_k) - \psi(x_0)\}$$

son linealmente independientes. De esta forma, cada uno es una base para un subespacio vectorial. Si P es la matriz que manda B a B' , consideramos la transformación lineal $T(X) = Px$. Como P es invertible, T es invertible y $T^{-1}(x) = P^{-1}x$ es continua. En conclusión, T es un homeomorfismo. No obstante, falta hacer que T esté definida sobre la realización geométrica $|K|_\phi$. Así, $T|_{|K|_\phi} : |K|_\phi \mapsto |K|_\psi$ es el homeomorfismo que buscamos. ■

Notación. Usualmente escribiremos la realización geométrica de un complejo simplicial K como $|K|$, omitiendo la mención del encaje afín ϕ .

Generalmente es conveniente usar los puntos de la base estándar de \mathbb{R}^n como imágenes de K_0 ; de esta manera aseguramos que todo complejo simplicial K tiene una realización geométrica encajable en \mathbb{R}^n donde $n = \#K_0$.

Por ejemplo,

1. la realización geométrica $|\Delta(k)|$ es homeomorfa al disco k -dimensional. Si $k = 2$,

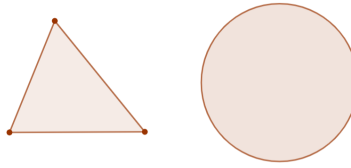


Figura 4: Se puede deformar topológicamente el triángulo para obtener el círculo

2. La realización geométrica de $\partial\Delta(k)$ es homeomorfa a la esfera $(k-1)$ -dimensional. Si $k = 2$,

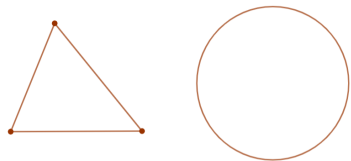


Figura 5: El triángulo hueco es homeomorfo a la circunferencia

Las realizaciones geométricas nos permiten ver más allá de los aspectos combinatorios de los complejos simpliciales y buscar una estructura en la geometría y la topología de sus realizaciones. También formalizan la forma en que dibujamos los complejos simpliciales.

Ahora, dos complejos simpliciales los vamos a relacionar, para poder compararlos, a través de funciones simpliciales.

Funciones simpliciales

Definición 1.47. Sean K y L complejos simpliciales. Una **función simplicial** $f : K \mapsto L$ es una asociación $K_0 \mapsto L_0$ de vértices a vértices que envía simplejos en simplejos. Es decir, para cada simplejo $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\}$ de K , la imagen $f(\sigma) = \{f(v_0), \dots, f(v_k)\}$ debe ser un simplejo de L .

Observación. Una función simplicial f no es necesariamente inyectiva; en general, $f(v_i)$ puede ser igual a $f(v_j)$ incluso cuando $v_i \neq v_j$. Por tanto, $\dim(f(\sigma)) \leq \dim(\sigma)$.

Cuando tenemos la noción de función hay dos aspectos importantes a tomar en cuenta. Dadas las funciones simpliciales $f : K \mapsto L$ y $g : L \mapsto M$, la composición

$$g \circ f : K \mapsto M$$

envía cada simplejo σ de K al simplejo $g(f(\sigma))$ de M ; por tanto es una función simplicial. Ahora que podemos componer, podemos definir isomorfismos.

Isomorfismo

Definición 1.48. Decimos que una función simplicial $f : K \mapsto L$ es un **isomorfismo** si existe una inversa; es decir, una función simplicial $g : L \mapsto K$ tal que las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son las identidades de K y L respectivamente.

A continuación vamos a utilizar una función $|f|$ que relaciona complejos simpliciales que ya viven como puntos en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.25. Para cualquier función simplicial $f : K \mapsto L$,

1. existe una función inducida $|f| : |K| \mapsto |L|$ entre las realizaciones geométricas de manera que para cada simplejo σ en K , el simplejo geométrico $|f(\sigma)| \subset |L|$ es exactamente la imagen bajo $|f|$ del simplejo geométrico $|\sigma| \subset |K|$; más aún,
2. si $g : L \mapsto M$ es otra función simplicial, entonces $|g \circ f|$ y $|g| \circ |f|$ coinciden como funciones continuas $|K| \mapsto |M|$.

Para darnos una idea de cómo construir $|f|$ a partir de f , sean $\phi : K \mapsto \mathbb{R}^n$ y $\psi : L \mapsto \mathbb{R}^n$ encajes afines. Esto significa que cada $\vec{x} \in |K|$ se puede expresar como una combinación lineal única de la forma $\sum_{v_i} t_i \phi(v_i)$, donde v_i abarca todos los vértices de K y $t_i \geq 0$ con $\sum_i t_i = 1$. La imagen $|f|(\vec{x}) \in |L|_\psi$ está dada por la fórmula

$$|f|(x) = \sum_{v_i} t_i \psi \circ f(v_i).$$

Tenemos entonces que v_i es un vértice en K , $f(v_i)$ es un vértice de L y $\psi(f(v_i))$ es un vértice en \mathbb{R}^n . Se toma la misma combinación lineal que se hubiera tomado en la realización de K . Si restringimos esta función a la realización de un solo simplejo $|\sigma|_\phi \subset |K|_\phi$, descubrimos que $|f|$ es una transformación lineal sobreyectiva a la realización del simplejo imagen $|f(\sigma)|_\psi \subset |L|_\psi$.

Observación. Cualquier isomorfismo simplicial $f : K \mapsto L$ induce un homeomorfismo $|f|$ entre los espacios topológicos $|K|$ y $|L|$. Esto es una consecuencia del teorema (1.24).

El recíproco no es verdadero porque el número de vértices puede variar entre complejos simpliciales. Esto ocurre con la subdivisión baricéntrica, que es una forma de hacer filtraciones de complejos simpliciales.

2. Análisis de conglomerados

Frecuentemente, los datos son representados como una colección de puntos sin un orden en un espacio euclidiano n -dimensional. Globalmente, la forma de los datos revela información relevante acerca del fenómeno subyacente que representan los datos, aún cuando estos residen en un espacio de muy alta dimensión. Esta es una de las ventajas del análisis topológico de datos.

En esta sección veremos que una manera muy cómoda de convertir una colección de puntos de un espacio métrico a un objeto global es a través de vértices de un complejo simplicial cuyas aristas estarán dadas por la proximidad entre los datos. Este complejo captura datos de conectividad mientras ignora una gran cantidad de características de orden superior más allá del agrupamiento. Específicamente, se completa el complejo simplicial de la siguiente manera: un espacio construido a partir de pedazos simples, los simplejos, identificados combinatoriamente a lo largo de las caras.

2.1. Filtraciones de datos

Datos

Definición 2.1. Por **datos** vamos a entender un conjunto finito de observaciones con una noción bien definida de distancia entre parejas de observaciones; es decir, un espacio métrico finito (M, ρ) .

Lo que entendemos por datos va a depender de cómo los estemos midiendo. Aquí le llamamos a un espacio métrico finito datos cuando los consideramos como el espacio universal, pero si los consideramos como un subespacio de un espacio métrico más grande, entonces les llamaremos nube de puntos.

Nube de puntos

Definición 2.2. Una colección finita M de puntos en un espacio métrico (X, ρ) es llamada una **nube de puntos**. En una nube de puntos se tiene una noción bien definida de *espesamiento* por una escala $\varepsilon > 0$: $M^{+\varepsilon}$ es la unión de las ε -bolas en X centradas en los puntos de M .

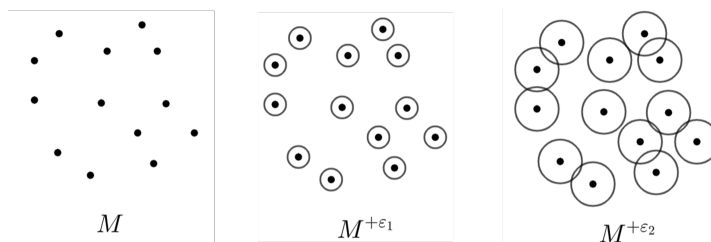


Figura 6: Nube de puntos | Espesamiento con escala ε_1 | Espesamiento con escala ε_2

Dentro de una nube de puntos, nos fijaremos en las posibles observaciones cercanas a nuestros puntos; es decir, las posibilidades cercanas a las observaciones reales. Para considerar esas posibles opciones, inflamos la nube de puntos con bolas. Para cualquier ε , vamos a considerar la unión de todas las bolas. Si pensamos en homeomorfismos tendríamos un espacio en el que podríamos trabajar aplicar toda la teoría previamente desarrollada y conocer su estructura topológica.

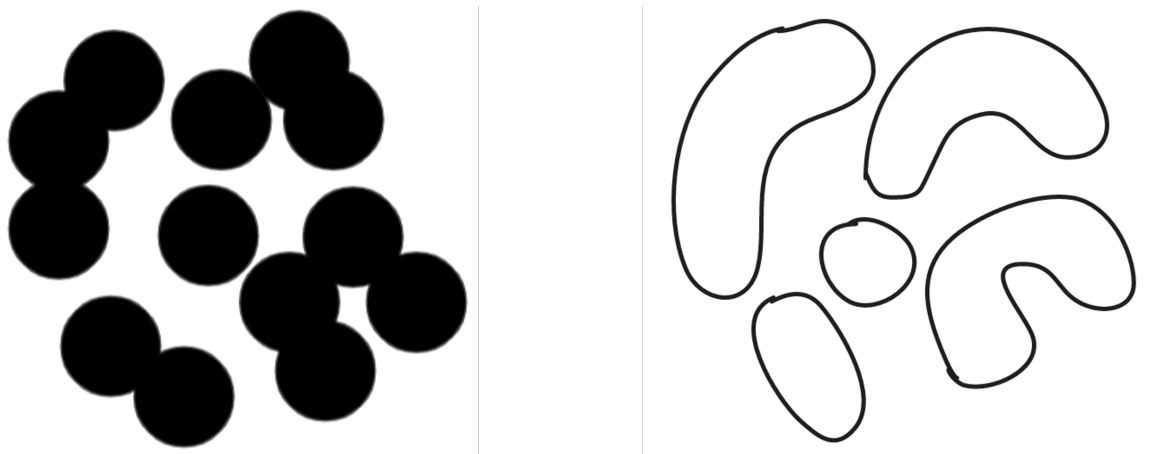


Figura 7: Unión de las bolas | Espacio homeomorfo

Para estudiar la estructura de este tipo de datos, vamos a asociarle un simplejo a cada una de estas uniones de bolas. Veremos las filtraciones de Vietoris-Rips y la de Čech. Al final, veremos que estas filtraciones de complejos simpliciales tendrán una equivalencia particular al espacio métrico de generado por la unión de las bolas.

Filtración de Vietoris-Rips

Definición 2.3. Sea (M, ρ) un espacio métrico finito. La **filtración de Vietoris-Rips** de M es una familia creciente de complejos simpliciales $VR_\varepsilon(M)$, indexada por los números reales $\varepsilon \geq 0$, definida como:

- un subconjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset M$ forma un simplejo k -dimensional en $VR_\varepsilon(M)$ si y sólo si $\rho(x_i, x_j) \leq \varepsilon$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$.

La filtración de Vietoris-Rips se visualiza de la siguiente manera: una vez que los radios de las bolas de los puntos sean suficientemente grandes para contener otro vértice, entonces se unen los vértices con una arista para formar el complejo simplicial. Para que un simplejo esté en nuestro complejo simplicial, las parejas de puntos deben estar a una distancia menor o igual a ε . Una de las dificultades es saber qué radio es el más conveniente para analizar los datos, lo cual depende del análisis que se realice. Por ejemplo, la falta de datos se representa como agujeros entre vértices. Estos agujeros en sí revelan cierta información y para un ε suficientemente grande perderíamos esa información.

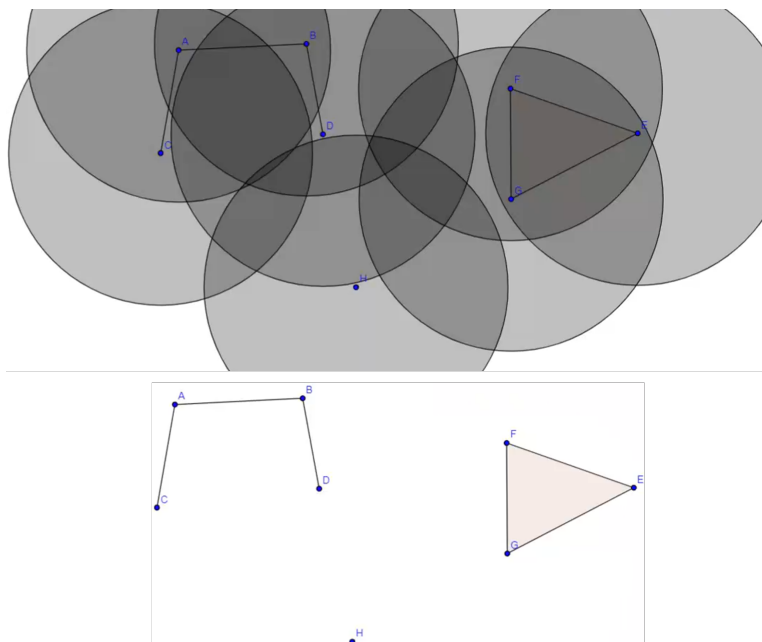


Figura 8: $VR_\varepsilon(M)$

Observación.

1. Aunque la familia está indexada por los números reales $\varepsilon \geq 0$, como M es finito, hay solamente una cantidad finita de posibles distancias entre pares de puntos de M ; por tanto hay solamente una cantidad finita de valores de ε para los cuales se agregan nuevo simplejos a $VR_\varepsilon(M)$.
2. El conjunto $VR_\varepsilon(M)$ es un complejo simplicial para cada $\varepsilon > 0$.
3. Los elementos de M son los vértices de cada $VR_\varepsilon(M)$.
4. Para cualesquiera $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$, $VR_\varepsilon(M)$ es un subcomplejo de $VR_{\varepsilon'}(M)$.

En la filtración de Čech sí nos va a importar el espacio, a diferencia de la filtración de Vietoris-Rips en donde solo nos importaban las distancias.

Filtración de Čech

Definición 2.4. Sea M un subconjunto de un espacio métrico (X, ρ) . La **filtración de Čech** de M con respecto a X es una familia creciente de complejos simpliciales $C_\varepsilon(M)$ indexada por $\varepsilon \geq 0$ definida por:

- un subconjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset M$ forma un simplejo k -dimensional en $C_\varepsilon(M)$ si y sólo si existe algún $x \in X$ tal que $\rho(x, x_i) \leq \varepsilon$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

La diferencia inmediata es que en la filtración de Čech necesitamos un $x \in X$ que cumpla con la condición dada, es por esto que aquí sí importa el espacio X . Aquí agregamos una arista cuando hay un punto x ε -cercano a dos vértices, usualmente el punto medio entre los dos vértices. Como tres vértices pueden no estar igualmente distanciados, con esta filtración sí podemos conseguir un simplejo hueco. Para que una arista aparezca, basta con que las bolas de los vértices se intersecten.

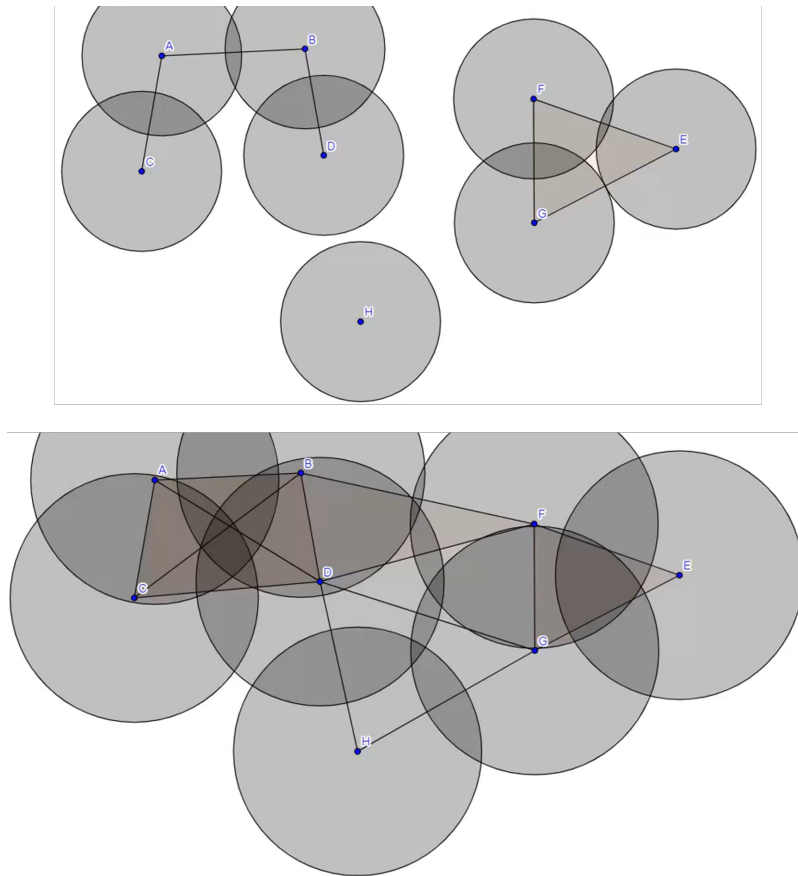


Figura 9: $C_\varepsilon(M)$

Tanto en esta filtración como en la anterior nos interesa la relación del complejo simplicial que le asociamos y la unión de las bolas. En la figura anterior observamos que sí se añaden simplejos huecos, a diferencia de la filtración de Vietoris-Rips. Además, podemos ver dos o tres componentes separadas, dependiendo del radio que se escoja.

Observación.

1. $C_\varepsilon(M)$ es un complejo simplicial para cada $\varepsilon > 0$.
2. Los elementos de M son los vértices de cada $C_\varepsilon(M)$.
3. Para cualesquiera $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$, $C_\varepsilon(M)$ es un subcomplejo de $C_{\varepsilon'}(M)$.

Comparando ambas filtraciones:

1. La filtración de Vietoris-Rips se puede definir directamente del conocimiento de la métrica de M , mientras que la filtración de Čech no.
2. Determinar el radio de la menor bola que contenga varios puntos es un reto algorítmico, por lo que las filtraciones de Vietoris-Rips son más fáciles de calcular.
3. La filtración de Vietoris-Rips puede perder información sobre la estructura geométrica de los datos.

2.2. Homotopía

Puede resultar una tarea complicada concluir si dos espacios son homeomorfos. Es por esto que trabajaremos con una propiedad más débil pero igual de útil, la relación de equivalencia homotópica. Para apoyar este estudio comenzamos con el concepto de conexidad pues es bastante geométrico. Algunas caracterizaciones de funciones tienen una relación con los conceptos de conexidad. Solo mencionaremos brevemente dos conceptos importantes pues tampoco es el tema de estudio.

Conexidad

Definición 2.5. Un espacio (X, τ) es **disconexo** si y sólo si existen conjuntos abiertos ajenos no vacíos H y K en X tales que $X = H \cup K$. Entonces decimos que (X, τ) es desconexo por H y K . Cuando no exista tal desconexión, X será **conexo**.

Ahora, un concepto todavía más geométrico es el de conexidad por trayectorias.

Conexidad por trayectorias

Definición 2.6. Un espacio (X, τ) es **conexo por trayectorias** si y sólo si para cualesquiera dos puntos x e y en X , hay una función continua $f : [0, 1] \mapsto X$ tal que $f(0) = x$, $f(1) = y$. Tal función f se llama una **trayectoria** de x a y .

La conexidad por trayectorias requiere que sea posible alcanzar cualquier punto en el espacio desde cualquier otro punto a lo largo de un camino conectado. Este enfoque es especialmente útil para estudiar las propiedades de conectividad desde un punto de vista algebraico, por ejemplo, a través de la teoría de la homotopía.

Siempre que contemos con datos, observaciones conocidas, que estén cerca de algún espacio X , conjunto desconocido, estaremos aplicando una nube de puntos. Los tres espacios a seguir son entonces X , la unión $M^{+\varepsilon}$ y la realización geométrica de la filtración $|F_\varepsilon K|$. No obstante, nos encontramos con el problema de que los tres espacios, en general, tendrán dimensiones distintas. Por lo tanto, no serán homeomorfas entre sí. Por eso necesitamos la homotopía.

Homotopía

Definición 2.7. Sean f y g funciones continuas de (X, τ_X) en (Y, τ_Y) . Decimos que f es homotópica a g , escrito $f \simeq g$ si y sólo si hay una función continua $H : (X, \tau_X) \times [0, 1] \mapsto (Y, \tau_Y)$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$. La función H se denomina **homotopía** entre f y g . Para más claridad, a veces escribiremos $H : f \simeq g$ cuando H es una homotopía entre f y g .

Observación. f y g son homotópicas si podemos encontrar una función continua θ del «cilindro» $X \times [0, 1]$ a Y cuya restricción a la «tapa inferior» $X \times \{0\}$ coincide con f y la restricción a la «tapa superior» $X \times \{1\}$ coincide con g .

Sean f y g dos funciones continuas de un espacio X en \mathbb{R}^2 . Entonces f y g son homotópicas, mediante la homotopía

$$\theta(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

la cual es llamada **homotopía por rectas**, porque lleva el punto $f(x)$ al punto $g(x)$ a lo largo del segmento de recta que los une.

Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ el **plano agujereado**. Las siguientes funciones $f, g : [0, 1] \mapsto X$

$$\begin{aligned} f(s) &= (\cos(\pi s), \sin(\pi s)), \\ g(s) &= (\cos(\pi s), 2\sin(\pi s)) \end{aligned}$$

son homotópicas, usando la homotopía por rectas. Pero la homotopía por rectas entre f y $h(s) = (\cos(\pi s), -\sin(\pi s))$ no es válida, pues su imagen no está contenida en X . Observemos que no existe una homotopía entre f y h .

Las homotopías entre funciones se pueden usar para producir una relación de equivalencia sobre espacios topológicos también.

Teorema 2.1. \simeq es una relación de equivalencia en el conjunto $C(X, Y)$ de todas las funciones continuas de X a Y .

Demostración. Si $f \in C(X, Y)$, entonces $H : f \simeq f$, donde H está definida por $H(x, t) = f(x)I_X(x)I_{[0,1]}(t)$, en donde I_X es la función indicadora.

Si $f, g \in C(X, Y)$ y $H : f \simeq g$, entonces $H' : g \simeq f$ donde $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$ para toda $x \in X$ y $t \in [0, 1]$.

Si $f, g, h \in C(X, Y)$ y $H_1 : f \simeq g$ mientras que $H_2 : g \simeq h$, entonces $H : f \simeq h$, donde

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(x, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

H es continua sobre $X \times [0, 1]$ ya que es continua bajo cada uno de los subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$. ■

La ventaja de que la homotopía sea una relación de equivalencia es que las propiedades que nos interesan las cumplirán todas las funciones que son homotópicas entre sí. Elegimos una de ellas y estudiamos todas a la vez.

Teorema 2.2. *Las composiciones de funciones homotópicas son homotópicas.*

Demostración. Supongamos que f_1 y g_1 son funciones homotópicas de (X, τ_X) en (Y, τ_Y) y f_2 y g_2 son funciones homotópicas de (Y, τ_Y) en (Z, τ_Z) ; digamos $H_1 : f_1 \simeq g_1$ y $H_2 : f_2 \simeq g_2$.

Entonces $f_2 \circ H_1 : f_2 \circ f_1 \simeq f_2 \circ g_1$. Por transitividad de la relación de homotopía, falta construir una homotopía entre $f_2 \circ g_1$ y $g_2 \circ g_1$. Definimos

$$H : X \times [0, 1] \mapsto Z$$

por $H(x, t) = H_2(g_1(x), t)$. Entonces H es una composición de funciones continuas y por tanto continua, y $H : f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1$. ■

Una forma de llevar una función en otra es a través de los retratos.

Retrato

Definición 2.8. Un subconjunto A de X es un **retrato** de X si y sólo si existe una función continua $r : X \mapsto A$, llamada **retracción**, tal que $r(a) = a \mathbf{1}_A(a)$. Decimos que A es un **retrato de deformación** de X si y sólo si hay un retrato $r : X \mapsto A$ que sea homotópico a la función identidad id_X . Si $H : r \simeq \text{id}_X$, H es una **retracción por deformación**.

La retracción es simplemente aplastar todos los puntos del conjunto X a A y dejar fijos los puntos que ya estaban en A . Un retrato por deformación hace lo mismo pero a lo largo del tiempo. Esto es; $r : X \mapsto A$ está dada por $r(x) = H(x, 1)$ y H es una homotopía entre la identidad de X y la función $j \circ r$, donde $j : A \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Por ejemplo, la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es un retrato por deformación del espacio euclidiano $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Consideramos la función

$$H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

definida por

$$H(\vec{x}, t) = (1 - t)\vec{x} + t \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

Dicha función va «encogiendo» gradualmente las rectas que salen del origen en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ al punto donde intersectan la circunferencia. Como para cada $\vec{y} \in S^1$, $\|\vec{y}\| = 1$, tenemos que $H(\vec{y}, t) = \vec{y}$ para cada $t \in [0, 1]$ y por lo tanto, H define un retracts por deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sobre S^1 .

La definición que vimos de homotopía es para funciones, sin embargo, lo que nos interesa es que los espacios sean homotópicamente equivalentes. Ahora, los espacios que son homotópicamente equivalentes preservan las propiedades que nos interesan, aunque no todas a diferencia de los homeomorfos. Esto se desprende del hecho que las relaciones homotópicas son relaciones de equivalencia.

Equivalencia homotópica

Definición 2.9. Dos espacios (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son **homotópicamente equivalentes** si y sólo si existen funciones continuas $f : (X, \tau_X) \mapsto (Y, \tau_Y)$ y $g : (Y, \tau_Y) \mapsto (X, \tau_X)$ tales que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ y $g \circ f \simeq \text{id}_X$. Las funciones f y g se denominan **equivalencias homotópicas** y le llamamos a g una **inversa homotópica** de f y vice versa.

Como los espacios homotópicamente equivalentes tienen las propiedades que nos interesan, podemos escoger analizar el más sencillo que tenga esas propiedades y así, estaremos estudiando todos los demás.

Tipo de homotopía

Definición 2.10. Dos espacios que son homotópicamente equivalentes se dice que tienen el mismo **tipo de homotopía**.

Hacemos observación sobre uno de los comentarios iniciales sobre la comparación entre la homotopia y el homeomorfismo.

Observación. La noción de equivalencia homotópica es más débil que la noción de homeomorfismo: Si (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son homeomorfos entonces son homotópicamente equivalentes, pero el recíproco no es cierto.

A este punto ya nos deshicimos del problema inicial. No importa la dimensión de los espacios que estudiemos, podemos hallar homotopías entre los tres espacios de interés que mencionamos. Llevamos esta observación a los complejos simpliciales. Como ya

sabemos cómo convertir un complejo simplicial en un objeto topológico, a través de su realización geométrica que ya vive en un espacio euclidiano, podemos hablar de su homotopía.

Definición 2.11. Dos complejos simpliciales K y L son **homotópicamente equivalentes**, o tienen el mismo **tipo de homotopía**, si sus realizaciones geométricas $|K|$ y $|L|$ son homotópicamente equivalentes.

Si consideramos la unión de las bolas y el complejo simplicial asociado, nos preguntamos ¿cómo verificamos que sí tengan mismo tipo de homotopía? Empezamos con los espacios que son los menos complicados desde una perspectiva homotópica.

Espacios contráctiles

Definición 2.12. Un espacio (X, τ_X) es **contráctil** si y sólo si la función identidad $\text{id}_X : (X, \tau_X) \mapsto (X, \tau_X)$ es homeomorfa a alguna función constante $c(x) = x_0$, de X a un punto $x_0 \in X$.

Teorema 2.3. (X, τ_X) es contráctil si y sólo si para cualquier espacio (T, τ_T) , cualesquiera dos funciones continuas $f, g : (T, \tau_T) \mapsto (X, \tau_X)$ son homotópicas.

Demostración. La segunda implicación se obtiene al hacer $T = X$ y f y g , respectivamente, la identidad y una función constante.

Para la implicación inversa, supongamos que (X, τ_X) es contráctil; digamos

$$\text{id}_X \simeq c,$$

donde c es una función constante de X a sí misma. Sean $f, g : T \mapsto X$ cualesquiera dos funciones continuas. Por el teorema (2.2), $f = \text{id}_X \circ f \simeq c \circ f$ y $g = \text{id}_X \circ g \simeq c \circ g$. Pero $c \circ f = c \circ g$, por lo que $f \simeq g$. ■

Teorema 2.4. (X, τ_X) es contráctil si y sólo si es homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual.

Demostración. Supongamos que (X, τ_X) es contráctil, digamos la identidad

$$\text{id}_X : (X, \tau_X) \mapsto (X, \tau_X)$$

es homotópica a la función constante $c(x) = x_0$. Sea $j : \{x_0\} \mapsto X$ la función inclusión. Entonces $c \circ j$ es la identidad sobre $\{x_0\}$ y $j \circ c = c$ es homeomorfa a la identidad sobre X . Por consiguiente, j es una equivalencia homotópica de $\{x_0\}$ a X .

Por el contrario, supongamos que $f : X \mapsto \{x_0\}$ es una equivalencia homotópica entre X y $\{x_0\}$, y sea $g : \{x_0\} \mapsto X$ un inversa homotópica. Entonces $g \circ f$ es una función constante de X en X que es homotópica a la identidad sobre X , así que X es contráctil. ■

Otra forma de ver que un espacio es contractil es que $\{p\}$ es un retracto por deformación del espacio. Las bolas y, en general, los conjuntos convexos de \mathbb{R}^n son contráctiles.

Sólidos: para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, el k -simplejo sólido $\Delta(k)$ es contráctil.

Árboles: un árbol es una gráfica conexa sin ciclos. Todo árbol es contráctil.

Podemos también observar que si X es homeomorfo a Y y X es contráctil, entonces Y es contráctil. Esto es; el ser contráctil es una invariante topológica.

El siguiente lema establece que si tenemos una función continua sobre la cáscara de un simplejo, podemos extender esa función a todo el simplejo.

Lema 2.1. Sean (X, τ) un espacio topológico y $k \in \mathbb{N}$. Si X es contráctil, entonces cualquier función continua $F : |\partial\Delta(k)| \mapsto X$ del k -simplejo hueco a X puede ser extendida a una función continua $F^+ : |\Delta(k)| \mapsto X$ del k -simplejo sólido.

Demostración. Para el caso $k = 1$. Puesto que $|\Delta(1)|$ es homeomorfo a $[0, 1]$ y $|\partial\Delta(1)|$ consiste de los puntos finales $\{0, 1\}$, debemos mostrar que X es **conexo por trayectorias**. Como X es contráctil, existen $p \in X$ y una homotopía $\theta : X \times [0, 1] \mapsto X$ tales que $\theta(x, 0) = x$ y $\theta(x, 1) = p$ para todo $x \in X$. Definamos $F^+ : [0, 1] \mapsto X$ como

$$F^+(t) = \begin{cases} \theta(F(0), 2t), & t \leq \frac{1}{2}; \\ \theta(F(1), 2t - 1), & t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Por el lema del pegado, F^+ es la extensión continua de F .

Para $k > 1$ la demostración es por inducción. ■

Teorema 2.5. Para cada dimensión $k \geq 0$, el k -simplejo sólido $\Delta(k)$ es contráctil.

Demostración. Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto afinamente independiente de puntos, entonces la realización geométrica $\Delta(k)$ está dada por

$$|\Delta(k)| = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i x_i : t_i \geq 0 \wedge \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}.$$

Definamos la función $\theta : |\Delta(k)| \times [0, 1] \mapsto \Delta(k)$ que envía cada $\sum_{i=0}^k t_i x_i$ en $|\Delta(k)|$ y $t \in [0, 1]$ al punto

$$\theta \left(\sum_{i=0}^k t_i x_i, t \right) = [1 - t(1 - t_0)] \cdot x_0 + t \sum_{i=0}^k t_i x_i.$$

Esto describe la homotopía por rectas que envía cada punto al punto x_0 . ■

Conociendo suficientes espacios contráctiles, estamos listos para explorar los detectores de equivalencia de homotopía.

2.3. El Teorema del Nervio

Lo que hicimos con las filtraciones de Vietoris-Rips y de Čech fue asignarle a una nube de datos un simplejo pero también la unión de las bolas centradas en cada observación. Cada una de las bolas se puede ver como un conglomerado, cada punto dentro de un conglomerado se asemeja ε suficiente a la observación real. Si un punto se encuentra en la observación de varias bolas, entonces ese punto se parece a las respectivas observaciones.

En general, cuando tenemos un espacio topológico o una nube de datos, lo que vamos a hacer es agrupar los datos en conglomerados de forma que se parezcan mucho; i.e. que estén cercanos. A cada observación le vamos a asignar una función y vamos a partir nuestra nube de puntos en conglomerados que se parezcan y una vez que hacemos eso les asignamos un simplejo. Los conglomerados van a formar una cubierta abierta y queremos que tenga las mismas propiedades homotópicas que el simplejo que le asociamos.

Transportadores

Definición 2.13. Sean K un complejo simplicial y (X, τ_X) un espacio topológico. Un **transportador** C para K en X es una función que asocia a cada simplejo σ de K un subconjunto $C(\sigma) \subset X$ de manera que $C(\sigma) \subset C(\tau)$ siempre que σ es una cara de τ .

Los transportadores ya los hemos utilizado cuando hablamos de realización geométrica pues es una función que le asocia a cada simplejo un subespacio euclidiano. La siguiente definición nos dará una homotopía que mueve simplejos en el tiempo, de forma que para toda $t \in [0, 1]$

$$H_t(|\sigma|) \subseteq C(\sigma).$$

Esto quiere decir que cualquier movimiento que le habíamos asignado a un simplejo se queda dentro del subconjunto que ya le habíamos asignado con un transportador.

Definición 2.14. Decimos que C **transporta** una función continuas

$$F : |K| \mapsto (X, \tau_X)$$

si para cada simplejo $\sigma \in K$ se tiene que $F(|\sigma|) \subset C(\sigma)$. Decimos que C **transporta** una homotopía $H : |K| \times [0, 1] \mapsto (Y, \tau_Y)$ si para cada $t \in [0, 1]$ la función $H_t : |K| \mapsto (Y, \tau_Y)$ dad por

$$H_t(x) = H(x, t)$$

es transportada por C en el sentido descrito arriba.

El lema del transportador nos dice cuándo dos funciones son homotópicas. Los espacios contráctiles juegan un rol crucial en el lema del transportador.

Lema 2.2. (del transportador) Sea C un transportador para K en (X, τ_X) . Si el subconjunto $C(\sigma) \subset (X, \tau_X)$ es contráctil para cada simplejo $\sigma \in K$, entonces

- (a) existe una función continua $F : |K| \mapsto (X, \tau_X)$ transportada por C ;
- (b) cualesquiera dos funciones continuas $F, G : |K| \mapsto (X, \tau_X)$ transportadas por C son homotópicas; y
- (c) de hecho, podemos elegir una homotopía $H : |K| \times [0, 1] \mapsto (X, \tau_X)$ entre F y G que son transportadas por C .

Demostración. Vamos a demostrar (b) y (c). Enumeramos los simplejos de K como $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ de manera que las caras de cada simplejo tengan un índice menor al propio simplejo, esto se puede asegurar, por ejemplo, enumerando todos los simplejos 0-dimensionales antes que todos los simplejos 1-dimensionales, y así sucesivamente. Tenemos entonces una filtración $\{K_i : j \leq i \leq m\}$ de K dada por

$$K_i = \bigcup_{j \leq i} \sigma_j.$$

Base de Inducción: Para $i = 1$ tenemos solamente un simplejo σ_1 de dimensión mínima; es decir, un vértice. Las funciones F y G envían al vértice σ_1 a puntos posiblemente distintos x_0 y x_1 en el espacio contráctil $C(\sigma_1) \subset X$.

Podemos considerar los puntos x_0 y x_1 como las imágenes de una función

$$|\partial\Delta(1)| \mapsto C(\sigma_1),$$

entonces existe una trayectoria en $C(\sigma_1)$ de x_0 a x_1 . Esta trayectoria describe una homotopía transportada por C entre las restricciones de F y G a $K_1 = \sigma_1$.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que para $i > 1$ las restricciones de F y G a $K_{i-1} \subset K$ admiten una homotopía $H : |K_{i-1}| \times [0, 1] \mapsto X$ transportada por C .

Paso Inductivo (Parte 1): Debemos extender H continuamente al espacio

$$|K_i| \times [0, 1];$$

así que es suficiente definir H en el conjunto $|\sigma_i| \times [0, 1]$, donde σ_i es el único simplejo que cumple $K_i = K_{i-1} \cup \sigma_i$.

Sea $B \subset |K_{i-1}|$ la unión de las realizaciones geométricas de todas las caras $\tau \leq \sigma_i$. Puesto que todos los $C(\tau)$ son subconjuntos de $C(\sigma_i)$, tenemos que la imagen

$$H(B \times [0, 1])$$

está contenida en $C(\sigma_i)$. Más aún, como C transporta a F y G , ambos $F(|\sigma_i|)$ y $G(|\sigma_i|)$ están en $C(\sigma_i)$.

Paso Inductivo (Parte 2): Notemos que el producto $|\sigma_i| \times [0, 1]$ es homeomorfo a $|\Delta(\dim(\sigma_i))| \times [0, 1]$, el cual es homeomorfo a $|\Delta(\dim(\sigma_i))|$. Por tanto, la frontera de $|\sigma_i| \times [0, 1]$ es homeomorfo a

$$|\partial\Delta(\dim(\sigma_i))| \simeq (|\partial\Delta(\dim(\sigma_i))| \times [0, 1]) \cup (|\Delta(\dim(\sigma_i))| \times \{0, 1\}).$$

Notemos que $|\partial\Delta(\dim(\sigma_i))| \times [0, 1]$ es homeomorfo a $B \times [0, 1]$, mientras que

$$|\Delta(\dim(\sigma_i))| \times \{0, 1\}$$

es homeomorfo a dos copias ajenas de $|\sigma_i|$.

La homotopía H envía la primera pieza a $C(\sigma_1)$, por la primera parte del Paso Inductivo. Para la segunda pieza, tenemos que

$$H(|\sigma_i|, 0) = F(|\sigma_i|) \subset C(\sigma_i).$$

Similarmente, $H(|\sigma_i|, 1) = G(|\sigma_i|) \subset C(\sigma_i)$. Así, salvo homeomorfismos, H es una función de la frontera $\partial\Delta(\dim(\sigma_i)+1)$ al espacio contráctil $C(\sigma_i) \subset X$. Entonces existe una extensión continua $H^+ : |\Delta(\dim(\sigma_i)+1)| \mapsto C(\sigma_i)$, y usando el homeomorfismo $\Delta(\dim(\sigma_i)+1) \simeq |H_i| \times [0, 1]$ tenemos la extensión continua H a $|\sigma_i| \times [0, 1]$. ■

El inciso (a) del lema del transportador asegura la existencia de alguna función continua cuando las imágenes $C(\sigma)$ son contráctiles. El inciso (b) asegura que si encontramos más funciones, éstas no diferirán homotópicamente.

Funciones simpliciales contiguas

Definición 2.15. Decimos que dos funciones simpliciales $f, g : K \mapsto L$ son **contiguas** si para cada simplejo σ de K , la unión $f(\sigma) \cup g(\sigma)$ es un simplejo de L .

El siguiente corolario nos permite tener más homotopías en simplejos y es una aplicación del lema del transportador.

Corolario 2.1. Si $f, g : K \mapsto L$ son contiguas, entonces son homotópicas.

Demostración. Para cada simplejo $\sigma \in K$, sea $C(\sigma) \subset |L|$ la realización geométrica del simplejo unión $f(\sigma) \cup g(\sigma)$. Esta asociación C define un transportador para K en L ; notemos que C transporta ambos f y g . Puesto que los simplejos sólidos son contráctiles, la conclusión se sigue del lema (2.2). ■

Cuando hablamos de funciones $f : X \mapsto Y$, la fibra de $y \in Y$ es $f^{-1}(y)$. Vamos a tener el concepto análogo para funciones simpliciales.

Fibras

Definición 2.16. Sea $f : K \mapsto L$ una función simplicial; para cada simplejo $\tau \in L$, la **fibra de τ bajo f** es la colección de simplejos de K dada por

$$\tau/f = \{\sigma \in K : f(\sigma) \leq \tau\}.$$

Entonces, esta es la colección de todos los simplejos en K cuyas imágenes terminan siendo caras de τ .

Observación.

1. Cada fibra es un subsimplejo de K .
2. τ/f es un subsimplejo de τ'/f siempre que $\tau \leq \tau'$ en L .

La fibra de Quillen nos va a decir cuándo las realizaciones geométricas de dos complejos simpliciales son homotópicamente equivalentes.

La Fibra de Quillen

Teorema 2.6. Sea $f : K \mapsto L$ una función simplicial. Si la fibra τ/f es contráctil para cada simplejo τ en L , entonces la función inducida $|f| : |K| \mapsto |L|$ admite una inversa homotópica $G : |L| \mapsto |K|$; y en particular, K y L son homotópicamente equivalentes.

Demostración. Para cada simplejo τ de L , sea $C(\tau) \subset |K|$ la realización geométrica de la fibra τ/f ; esto define un transportador para L en K donde cada $C(\tau)$ es contráctil; por el lema del transportador existe una función continua $G : |L| \mapsto |K|$ tal que

$$G(|\tau|) \subset C(\tau) = |\tau/f|$$

para cada $\tau \in L$. Demostremos que G es una inversa homotópica de $|f|$.

1. $|f| \circ G$ es homotópica a la identidad sobre $|L|$: Para cada simplejo $\tau \in L$, tenemos que

$$|f| \circ G(|\tau|) \subset |\tau|,$$

porque $G(|\tau|) \subset |\tau/f|$. Por tanto, la asignación $C_L(\tau) = |\tau|$ define un transportador para L en $|L|$ que transporta ambos $|f| \circ G$ y la función identidad sobre $|L|$. Puesto que $|\tau|$ es contráctil, tenemos del lema del transportador que $|f| \circ G$ es homotópica a la identidad sobre L .

2. $G \circ |f|$ es homotópica a la identidad sobre $|K|$: Para cada simplejo $\sigma \in K$, la $|f|$ -imagen de $|\sigma|$ es $|f(\sigma)| \subset |L|$. Recordemos que, por la construcción de G , tenemos que

$$G(|f(\sigma)|) \subset C(f(\sigma)) = |f(\sigma)/f|.$$

Entonces si definimos C_K como el transportador para K en $|K|$ dado por $C_K(\sigma) = |f(\sigma)/f|$, tenemos que C_K transporta $G \circ |f|$. Notemos además que σ está en $f(\sigma)/f$, así que C_K también transporta la identidad sobre K . Puesto que cada $C_K(\sigma)$ es contráctil por nuestra suposición sobre las fibras de f , el lema del transportador concluye la demostración. ■

El teorema de la fibra de Quillen es equivalente a decir que existe una función simplicial $G : |L| \mapsto |K|$ tal que $|f| \circ G \simeq \text{id}_{|L|}$ y $G \circ |f| \simeq \text{id}_{|K|}$. En esencia, toda función simplicial que tiene fibras contráctiles, sus complejos simpliciales tienen el mismo tipo de homotopía.

Finalmente podremos demostrar formalmente que el espacio topológico (X, τ_X) al que aproximamos una nube de puntos es homotópicamente equivalente a la realización geométrica del complejo simplicial de dicha nube de puntos. Pero primero requerimos establecer conceptos para concluir el resultado. Empezamos con la cubierta abierta finita.

Cubierta abierta finita

Definición 2.17. Una **cubierta abierta finita** \mathcal{U} de un espacio topológico (X, τ) es una colección finita de subconjuntos abiertos $U_\alpha \subset X$, donde $\alpha \in \Lambda$, tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha.$$

Esta es simplemente una manera de tomar un espacio complicado y partirlo en pedazos abiertos que se pueden traslapar.

Con la siguiente definición, de nervios, le vamos a asociar un complejo simplicial a una cubierta. Cada abierto va a representar un vértice, naturalmente, del complejo simplicial, vamos a unir vértices siempre y cuando los abiertos respectivos se intersecten.

Lo que hace un nervio es, básicamente, lo que hace el complejo de Čech, solo que el complejo de Čech se restringe a usar bolas. El nervio utiliza abiertos en general.

Nervios

Definición 2.18. El **nervio** $N(\mathcal{U})$ de una cubierta abierta finita

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha \neq \emptyset : \alpha \in \Lambda\}$$

de un espacio topológico (X, τ) es el complejo simplicial cuyos i -simplejos están dados por todos los subconjuntos $\sigma \subset \Lambda$ de cardinalidad $i + 1$ para los cuales la intersección

$$\text{Supp}(\sigma) := \bigcap_{\alpha \in \sigma} U_\alpha$$

es no vacía. La intersección $\text{Supp}(\sigma) \subset X$ es llamada el **soporte** del simplejo σ .

Observación.

1. Los vértices de $N(\mathcal{U})$ son los elementos de Λ .
2. $\sigma \leq \tau$ en $N(\mathcal{U})$ significa que $\text{Supp}(\tau) \subset \text{Supp}(\sigma) \subset (X, \tau_X)$.
3. $N(\{X\}) \simeq \Delta(0)$.

El Teorema del Nervio establece que (X, τ_X) y el nervio tienen el mismo tipo de homotopía. Le estamos asociando un complejo simplicial a (X, τ_X) , pero si tenemos que los soportes son contráctiles, resulta que el complejo simplicial que le estamos asociando tiene las mismas propiedades homotópicas que (X, τ_X) .

Teorema del Nervio

Teorema 2.7. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \neq \emptyset : \alpha \in \Lambda\}$ una cubierta abierta finita de un espacio topológico (X, τ) . Si cada simplejo $\sigma \in N(\mathcal{U})$ tiene soporte

$$\text{Supp}(\sigma) \subset X$$

contráctil, entonces $|N(\mathcal{U})|$ es homotópicamente equivalente a X .

Demostración. Sea $X(\mathcal{U})$ el subconjunto del producto $X \times |N(\mathcal{U})|$ consistente de los pares ordenados (x, u) para los cuales existe un simplejo $\sigma \in N(\mathcal{U})$ tal que $x \in \text{Supp}(\sigma)$ y $u \in |\sigma|$. Consideremos las proyecciones naturales de $X(\mathcal{U})$ a ambos X y $|N(\mathcal{U})|$: $p : X(\mathcal{U}) \mapsto X$ y $q : X(\mathcal{U}) \mapsto |N(\mathcal{U})|$, dadas por $p(x, u) = x$ y $q(x, u) = u$.

Veamos que para cada $x \in X$ y $u \in |N(\mathcal{U})|$, las fibras $p^{-1}(x)$ y $q^{-1}(u)$ son contráctiles.

Fibras de p : Para cada punto $x \in X$, la fibra $p^{-1}(x) \subset X(\mathcal{U})$ es homeomorfa al conjunto de todos los $u \in |N(\mathcal{U})|$ que están en las realizaciones de simplejos σ cuyo soporte es la intersección de todos los U_α tales que $x \in U_\alpha$. Por tanto, $p^{-1}(x)$ es homeomorfo a la realización geométrica de $|\sigma_x|$, la cual es contráctil.

Fibras de q : Dado $u \in |N(\mathcal{U})|$, sea $\sigma_u \in N(\mathcal{U})$ el único simplejo que contiene a u en el interior de su realización. La fibra $q^{-1}(u) \subset X(\mathcal{U})$ es homeomorfa al soporte $\text{Supp}(\sigma_u) \subset X$, la cual es contráctil.

Para terminar: Aplicando el teorema de la Fibra de Quillen, tenemos que X y $|N(\mathcal{U})|$ son homotópicamente equivalentes a $X(\mathcal{U})$. ■

El Teorema del Nervio nos da un mecanismo para regresar de espacios topológicos a complejos simpliciales; en ese sentido, constituye una especie de inversa a las realizaciones geométricas de la definición 1.45. Como el complejo de Čech coincide con el nervio de una cubierta de bolas, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito de puntos. para cada radio $\varepsilon > 0$, la unión $M^{+\varepsilon} \subset \mathbb{R}^n$ de las bolas de radio ε centradas en los puntos de M es homotópicamente equivalente a la realización geométrica del complejo de Čech $C_\varepsilon(M)$.*

Demostración. Por definición

$$M^{+\varepsilon} = \bigcup_{x \in M} B(x, \varepsilon),$$

entonces la colección $\mathcal{U} = \{B(x, \varepsilon) : x \in M\}$ es una cubierta abierta de $M^{+\varepsilon}$. Notemos que $C_\varepsilon(M)$ es el nervio de dicha cubierta. Además, las intersecciones de las bolas son contráctiles pues son convexas. Aplicando el Teorema del Nervio, se obtiene el resultado. ■

Observación. No hay un resultado análogo para la filtración de Vietoris-Rips.

3. Homología

Necesitamos tratar la manera en que se conecta un espacio, lo cual se hace a través de la homología pues nos permite hablar de ello cuantitativamente y sin ambigüedad. Al final de la sección aterrizaremos muchos de los conceptos desarrollados a lo largo de la tesis con explicaciones intuitivas. Un estudio riguroso de la homología y de la persistencia viene en [13]. En este capítulo movemos nuestra atención hacia el álgebra computacional. A pesar de contar con todos los resultados de los primeros dos capítulos, sigue siendo difícil extraer un algoritmo que compare los tipos de homotopía de dos complejos simpliciales.

3.1. Invariantes homotópicas

Dada la problemática descrita arriba, buscaremos características que sean invariantes homotópicas para complejos simpliciales. Si K es un complejo simplicial, $I(K)$ es una propiedad de K , decimos que I es un invariante homotópico si para todo L homotópicamente equivalente a K , entonces $I(L)$ es una propiedad de L isomorfa a $I(K)$. La característica de Euler es uno de los invariantes topológicos más simples que podemos encontrar.

Si conectamos dos puntos de K por medio de un 1-simplejo, entonces la característica de Euler decrecerá una unidad. Esta invariante cuenta simplejos de dimensión par con peso 1 y simplejos de dimensión impar con peso -1 .

Característica de Euler

Definición 3.1. La característica de Euler de un complejo simplicial K es el entero $\chi(K) \in \mathbb{Z}$ dado por

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\dim(K)} (-1)^i \cdot \#K_i.$$

Reducir todo un complejo simplicial a un solo número entero puede parecer absurdo a primera vista, pero esta simple definición resulta en propiedades interesantes. En primer lugar es fácil de calcular, tanto a mano como a computadora. Además resulta invariante homotópicamente.

Teorema 3.1. χ es una invariante homotópica: si K y L son complejos simpliciales homotópicamente equivalentes, entonces $\chi(K) = \chi(L)$.

El argumento para el teorema 3.1 es que es la característica de Euler es invariante bajo homeomorfismos. Al analizar la definición de la característica de Euler, fácilmente

nos podemos dar cuenta de que está definida de la manera siguiente para complejos,

$$\chi(\partial\Delta(K)) = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ 1 & k \text{ impar.} \end{cases}$$

Corolario 3.1. *Todos los complejos simpliciales contráctiles tienen característica de Euler igual a 1.*

La mejor manera de ver que χ es homotópicamente invariante es verlo como una reducción numérica de un invariante de homotopía más general; este invariante más general es la homología.

Será conveniente otorgarles un orden a los vértices de los simplejos con los que trabajaremos.

Orientación

Definición 3.2. Una orientación de un complejo simplicial K es una función inyectiva $o : K_0 \mapsto \mathbb{Z}_+$. Por convención, la imagen de o serán los primeros $\#K_0$ elementos de \mathbb{Z}_+ .

Dada una orientación de K , escribiremos a los simplejos como subconjuntos *ordenados* de K_0 como $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_k) \in K_0 \times \dots \times K_0$, tal que

$$o(v_0) < o(v_1) < \dots < o(v_k).$$

Así, σ es un **simplejo ordenado**. Ya que tenemos una orientación, podemos etiquetar las caras de un simplejo orientado.

Caras

Definición 3.3. Sea K un complejo simplicial orientado y sea $\sigma = (v_0, \dots, v_k)$ un k -simplejo ordenado. Para toda $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, la i -ésima **cara** de σ es el $(k-1)$ -simplejo

$$\sigma_{-i} = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

obtenido al remover el i -ésimo vértice.

La matriz de incidencia $A(V, E)$ tiene los vértices V indexando sus filas y las aristas E indexando sus columnas; la entrada en la fila v y columna e de $A(V, E)$ está dada por la regla

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } e_j \text{ sale de } v_i \\ 1 & \text{si } e_j \text{ llega a } v_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, cada columna de A contiene exactamente un 1 y un -1 , con todas las otras entradas siendo necesariamente cero.

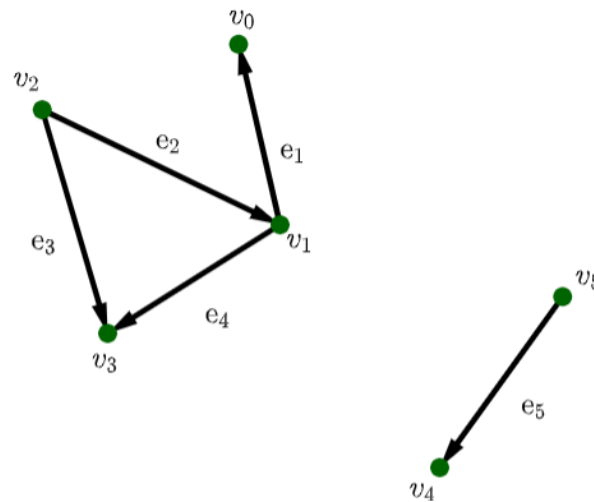


Figura 10: Grafo dirigido

De este grafo dirigido, obtenemos la matriz de incidencia

$$\begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, por ejemplo, e_2 tiene de origen al vértice v_2 y se dirige a v_1 , por lo que está dado por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matriz de incidencia puede tratarse como una transformación lineal con codominio el espacio vectorial generado por la base ortonormal de vértices V y dominio el espacio vectorial generado por las aristas E . El número de componentes conexas de (V, E) es $\#V - \text{rango}(A)$ y el número de ciclos no dirigidos en (V, E) es $\#E - \text{rango}(I)$. Extenderemos esta noción de forma lineal para definir la frontera de un simplejo.

Los agujeros son una característica que queremos distinguir en el estudio de nubes de datos. Más adelante veremos una forma menos «austera» de calcularlos. Una manera de hacerlo es a través de la frontera de un simplejo. La frontera de un simplejo es la colección de sus caras, que son de una dimensión menos. En la siguiente definición la frontera algebraica aparece como combinación lineal sobre algún campo \mathbb{F} . Será conveniente, por el momento, no preocuparse de donde viven los coeficientes ± 1 . Simplemente trataremos la frontera algebraica de cada simplejo σ como una suma formal de sus caras.

Frontera algebraica

Definición 3.4. Sea σ un simplejo k -dimensional orientado. La **frontera algebraica** de σ es la combinación lineal

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_{-i},$$

donde σ_{-i} es la i -ésima cara de σ .

Como los simplejos cero-dimensionales no tienen caras de dimensiones menores, tendremos la convención de que $\partial_0(v) = \mathbf{0}$. Si calculamos la composición del operador frontera con él mismo sobre cualquier k -simplejo, éste se anula. Podemos decir que una frontera no tiene frontera.

Teorema 3.2. Para cualquier k -simplejo orientado σ de dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$(\partial_{k-1} \circ \partial_k)(\sigma) = \mathbf{0}.$$

Demostración. Tenemos que $\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_{-i}$, y por tanto

$$(\partial_{k-1} \circ \partial_k)(\sigma) = \sum_{j < i}^k (-1)^i (-1)^j \sigma_{-j, -i} + \sum_{j > i}^k (-1)^i (-1)^j \sigma_{-i, -j}.$$

Las últimas dos sumas se cancelan ya que después de cambiar i y j en la segunda suma, se convierte en el negativo de la primera. ■

3.2. Conceptos y definiciones

Estudiaremos la homología de un complejo finito $K \subset \mathbb{R}^n$. En general, los resultados de la homología se reducen a la aplicación de espacios vectoriales. Por lo que, si bien, se cumplen sobre un campo de escalares general \mathbb{F} , será usual y conveniente usar el campo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

El campo \mathbb{Z}_2

Definición 3.5. Definimos el campo \mathbb{Z}_2 como el conjunto $\{0, 1\}$ con las operaciones dadas por

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

\otimes	0	1
0	0	0
1	0	1

Observación. $-1 = 1$ y $(-1)^n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que bajo el campo \mathbb{Z}_2 , sumar es lo mismo que restar.

Más aún, el operador frontera define transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Ya que tenemos un campo definido sobre el cual estamos trabajando, ahora definimos el espacio vectorial.

Espacio vectorial de k -cadenas

Definición 3.6. Sean K un complejo simplicial orientado y $k \in \mathbb{Z}_+$. Definimos el k -ésimo grupo de cadenas de K como el espacio vectorial $C_k(K)$ sobre el campo \mathbb{Z}_2 , que tiene a los k -simplejos de K como una base.

Esta definición nos deja entrever que, a partir de ahora, estaremos usando álgebra lineal para estudiar estructuras de nubes de puntos.

Observación. Es decir, si $K_k = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ son los k -simplejos de K , entonces cada vector $\gamma \in C_k(K)$, llamado k -cadena, es una combinación lineal única de la forma

$$\gamma = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sigma_i,$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{Z}_2$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Entonces, geoméricamente, los coeficientes λ_i nos van a indicar qué simplejos de dimensión k forman a γ .

Como este espacio vectorial está restringido al campo \mathbb{Z}_2 tenemos,

$$C_k(K) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i : \lambda_i \in \{0, 1\} \right\},$$

donde $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ es el conjunto de k -simplejos de K . Además, como cualquier k -cadena se puede escribir como suma de k -simplejos, esta suma puede interpretarse como la unión de k -simplejos y la suma de dos de estos será su diferencia simétrica. Si

$\gamma' = \sum_{i=1}^m \lambda'_i \sigma_i$ es otra k -cadena y $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, la suma vectorial y el producto escalar están definidos por

- $\gamma + \gamma' = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \lambda'_i) \sigma_i$
- $\alpha \cdot \gamma = \sum_{i=1}^m (\alpha \cdot \lambda_i) \sigma_i,$

con las operaciones de los escalares en \mathbb{Z}_2 . En el espacio vectorial de k -cadenas, $\mathbf{0} = \emptyset$, pues sería una combinación lineal en donde todos los coeficientes son cero. Geométricamente significa que no unimos ningún simplejo, por eso es el vacío. Para ejemplificar la suma consideremos las siguientes dos cadenas.

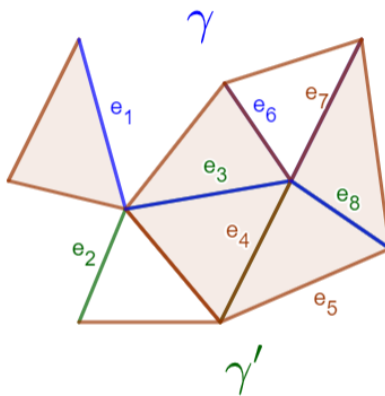


Figura 11: k -cadenas γ y γ'

Entonces,

$$\gamma = e_1 + e_3 + e_6 + e_7 + e_8$$

$$\gamma' = e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_8.$$

Así, la suma sería

$$\gamma + \gamma' = e_1 + e_2 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7.$$

Los términos que coinciden en ambas cadenas se cancelan pues la suma de dos mismos términos, bajo \mathbb{Z}_2 , es 0. De esta forma, tenemos que la suma de dos cadenas es la unión de las aristas de las cadenas menos su intersección. Notemos también que para $k = 2$, la base son los simplejos «rellenos».

Observación. Si $k > \dim(K)$, entonces $C_k(K) = \{\mathbf{0}\}$ es el espacio vectorial trivial 0-dimensional.

Observación. Geométricamente, una k -cadena puede verse como una colección finita de k -simplejos, y la suma de dos k -cadenas como la diferencia simétrica de las dos colecciones correspondientes.

Tenemos definida la frontera de un simplejo. Podemos extender esta definición a la frontera de una cadena de dimensión k . Una cadena de dimensión k es una unión de simplejos, entonces, naturalmente, definimos el operador frontera.

Operador frontera

Definición 3.7. Para cada dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, el k -operador frontera ∂_k^K del complejo simplicial K es la transformación \mathbb{Z}_2 -lineal $\partial_k^K : C_k(K) \mapsto C_{k-1}(K)$

que envía cada k -cadena básica $\gamma = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sigma_i \in C_k(K)$ a una $(k-1)$ -cadena

$$\partial_k^K(\gamma) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_k^K(\sigma_i),$$

donde $K_k = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$.

Observación. Como cada σ_{-i} es un $(k-1)$ -simplejo, entonces $\partial_k^K(\gamma)$ es una $(k-1)$ -cadena.

Si $\gamma \in C_k(K)$, $\gamma = \sum_{\sigma \in K_k} \gamma_\sigma \cdot \sigma$, entonces

$$\partial_k^K(\gamma) = \sum_{\sigma \in K_k} \gamma_\sigma \partial_k^K(\sigma).$$

El teorema (3.2) aplica para simplejos, pero el operador frontera lo definimos como la suma de las fronteras de los simplejos. Por lo tanto, ésa propiedad se seguirá cumpliendo para las cadenas de dimensión k .

Corolario 3.2. Para cada dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, la composición

$$\partial_k^K \circ \partial_{k+1}^K : C_{k+1}(K) \mapsto C_{k-1}(K)$$

es la transformación cero. Es decir, la imagen ∂_{k+1}^K está contenida en el kernel de ∂_k^K

$$\begin{array}{ccccc} \gamma & \xrightarrow{\partial_{k+1}^K} & \partial_{k+1}^K(\gamma) & \xrightarrow{\partial_k^K} & \mathbf{0} \\ C_{k+1} & & C_k & & C_{k-1} \end{array} .$$

Este corolario se justifica al ser el operador frontera una transformación lineal definida como combinación lineal de otras transformaciones lineales. A fin de cuentas, esta composición de transformaciones lineales nos dará la transformación cero. Recordemos, de la teoría de matrices, que el kernel de un espacio vectorial es el conjunto de vectores a los que una transformación lineal manda al cero vectorial. Nos interesa el kernel del operador frontera pues resulta que sus elementos encierran agujeros. Observemos también que la imagen del operador $(k+1)$ -frontera está en el kernel del operador k -frontera.

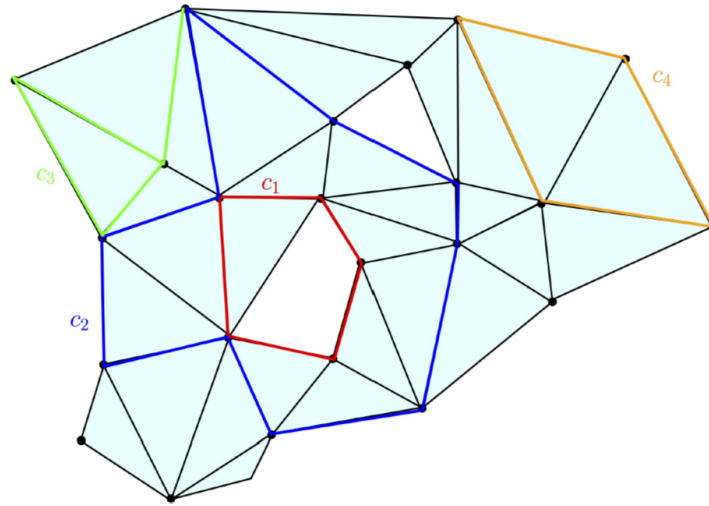


Figura 12: Complejo simplicial de dimensión 2

Por ejemplo, del siguiente complejo simplicial vamos a ver cuáles cadenas son elementos del kernel.

Vemos que las cadenas c_i son de dimensión 1. Esto significa que $\partial_1(c_i) = \mathbf{0}$ para algún $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos a encontrar cuál i cumple esto. Fácilmente se puede ver que $\partial_1(c_1) = \mathbf{0}$ porque todos los vértices de c_1 se sumarán dos veces en el cálculo de la frontera. Asimismo, $\partial_1(c_2) = \mathbf{0} = \partial_1(c_4)$. Con c_3 no pasa lo mismo. Ahora debemos ver cuál c_i cumple $\partial_2(\sigma) = c_i$. Esto es, ¿cuál c_i es frontera de un simplejo de dimensión 2? En realidad, solo c_4 cumple con esto pues es frontera de la suma de dos simplejos de dimensión 2. c_1 y c_2 no lo cumplen porque encierran agujeros, los cuales no son simplejos de dimensión 2. Entonces, los que son frontera de simplejos de dimensión 2 sí están en el kernel, pero hay todavía más elementos en el kernel, como c_1 y c_2 . A c_3 no lo consideramos porque ni siquiera está en el kernel.

Observación. Tenemos una sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_{k+1}^K} & C_k(K) & \xrightarrow{\partial_k^K} & C_{k-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{k-1}^K} & \dots & \xrightarrow{\partial_2^K} & C_1(K) & \xrightarrow{\partial_1^K} & C_0(K) & \xrightarrow{\partial_0^K} & \mathbf{0} \end{array}$$

Para una representación en diagramas de esta sucesión y la definida a continuación puede referirse a [3]. Las propiedades de los espacios $C_k(K)$ con el operador frontera motivan a la siguiente definición general.

Complejo de cadenas

Definición 3.8. Un **complejo de cadenas** (C_\bullet, d_\bullet) sobre el campo \mathbb{F} es una colección de \mathbb{F} -espacios vectoriales C_k y \mathbb{F} -transformaciones lineales $d_k : C_k \mapsto C_{k-1}$ tales que $d_k \circ d_{k+1} = \mathbf{0}$ para toda $k \geq 0$.

Observación. El complejo de cadenas $(C_k(K), \partial_k^K)$ es una colección de complejos simpliciales.

Dado el análisis de la figura 13, naturalmente definimos a los elementos del kernel como ciclos de dimensión k . Geométricamente es que encierran simplejos.

k -ciclos

Definición 3.9. Para cualquier $k \in \mathbb{Z}_+$, a los elementos de

$$\ker(\partial_k^K) = \{\gamma \in C_k(K) : \partial_k^K(\gamma) = \mathbf{0}\}$$

se les llama k -**ciclos** de K .

Igualmente, el análisis de la figura 13 motiva la definición de las fronteras de dimensión k . Estas son k -cadenas que son fronteras de simplejos de dimensión $k + 1$.

k -fronteras

Definición 3.10. Los elementos de

$$\text{Im}(\partial_{k+1}^K) = \{\gamma \in C_k(K) : \exists \gamma' \in C_{k+1}(K), \partial_{k+1}(\gamma') = \gamma\}$$

se llaman k -**fronteras** de K .

La idea es que una frontera es algo que viene de una dimensión más alta y un ciclo es algo que se crea en alguna dimensión. Tanto $\ker(\partial_k^K)$ como $\text{Im}(\partial_{k+1}^K)$ son subespacios de $C_k(K)$, entonces

$$\text{Im}(\partial_{k+1}^K) \subset \ker(\partial_k^K) \subset C_k(K).$$

Es decir, cualquier k -frontera es un k -ciclo.

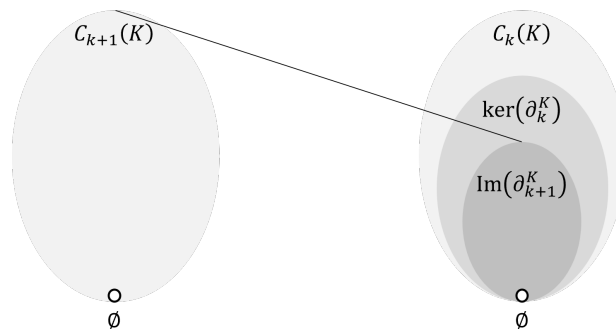


Figura 13: Ciclo, frontera y cadena con su imagen bajo el operador frontera.

Nuevamente consideramos la figura 13 y como nuestro objetivo es estudiar su estructura topológica, ahora vamos a estudiar sus agujeros. Los ciclos son los candidatos a encerrar agujeros. De ahí tenemos que tanto c_1 como c_2 encierran al mismo agujero. La suma $c_1 + c_2 \in \ker(\partial_1)$, pues todos los vértices se van a cancelar porque aparecen un número par de veces. Además, $c_1 + c_2 = \partial_2(\tau)$ donde τ es la suma, geoméricamente la unión, de los triángulos dentro de c_2 pero fuera de c_1 . Esta es precisamente la definición de ciclos homólogos. Notemos también que c_4 es un ciclo que no encierra agujeros. Formalmente escribimos $c_4 + \mathbf{0} = \partial_2(\gamma_1 + \gamma)$ donde las γ_i son los triángulos dentro de c_4 . Es decir, c_4 es homólogo al cero vectorial, lo que significa que no encierra ningún agujero.

Ciclos homólogos

Definición 3.11. Decimos que dos k -ciclos $\gamma, \gamma' \in \ker(\partial_k^K)$ son **homólogos**, denotado por $\gamma \sim \gamma'$, si difieren por una frontera; es decir, si existe una $(k+1)$ -cadena $\partial_{k+1}(\delta) \in C_{k+1}(K)$ tal que $\gamma - \gamma' = \partial_{k+1}(\delta)$.

Recordando que bajo \mathbb{Z}_2 , la suma es lo mismo que la resta, por lo que

$$\gamma - \gamma' = \partial_{k+1}(\delta) = \gamma + \gamma'.$$

Así, si dos ciclos son homólogos, ya sabemos que encierran los mismos agujeros y no contaremos demás. De acuerdo con las definiciones (3.8) y (3.9) podemos definir al grupo de homología. Estos grupos de homología nos arman con herramientas para describir matemáticamente agujeros en un espacio topológico. Esto lo hacen enfocándose en aquello que los rodea. Para motivar la definición de grupo de homología, la clase de homología de $\sigma \in \ker(\partial_k^K)$ es por definición el conjunto

$$\sigma + \text{Im}(\partial_k^K) = \{\sigma + \tau : \tau \in \text{Im}(\partial_k^K)\}.$$

Ahora, dos ciclos $\sigma_1 \sim \sigma_2$ son *homólogos* si están en la misma clase de homología; es decir, existe $\tau \in \text{Im}(\partial_k^K)$ tal que

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2 = \tau.$$

Observación. «Ser homólogos» es una relación de equivalencia:

- **Reflexiva:** $\gamma \sim \gamma'$; eso significa que un k -ciclo está relacionado consigo mismo

$$\gamma + \gamma = \mathbf{0} = \partial_{k+1}(\mathbf{0}).$$

- **Simétrica:** $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \gamma' \sim \gamma$; eso significa que

$$\underbrace{\gamma + \gamma'} = \partial_{k+1}(\delta)$$

$$\gamma' + \gamma = \partial_{k+1}(\delta),$$

por la conmutatividad del espacio vectorial de cadenas.

- **Transitiva:** $\gamma \sim \gamma' \wedge \gamma' \sim \gamma'' \Rightarrow \gamma \sim \gamma''$;

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma' &= \partial_{k+1}(\delta) \\ \gamma' + \gamma'' &= \partial_{k+1}(\delta') \end{aligned} \implies \gamma + \gamma'' = \partial_{k+1}(\delta) + \partial_{k+1}(\delta') = \partial_{k+1}(\delta + \delta').$$

Notación. Dado un k -ciclo $\gamma \in \ker(\partial_k^K)$, la clase de equivalencia de γ es el conjunto

$$[\gamma] = \{\gamma' \in \ker(\partial_k^K) : \gamma \sim \gamma'\}.$$

En esta nueva notación nos fijamos en todos los k -ciclos que encierran los mismos agujeros que γ y los representamos únicamente con γ . Ahora ya no consideramos todos los k -ciclos, solo a los representantes de cada clase.

Definición 3.12. Sean $\gamma, \gamma_1 + \gamma_2 \in \ker(\partial_k^K)$ y $\lambda \in \mathbb{Z}_2$. Definimos la suma de clases y producto por un escalar como:

- $[\gamma_1] + [\gamma_2] = [\gamma_1 + \gamma_2]$,
- $\lambda \cdot [\gamma] = [\lambda \cdot \gamma]$.

Para un espacio vectorial general \mathcal{C}_\bullet con su transformación lineal d_\bullet , definimos al grupo de homología con sus clases de equivalencia.

Grupo de homología

Definición 3.13. Para cada dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, el k -ésimo **grupo de homología** de $(\mathcal{C}_\bullet, d_\bullet)$ se define como el conjunto de clases de equivalencia

$$H_k(\mathcal{C}_\bullet, d_\bullet) = \ker(d_k) / \text{Im}(d_{k+1}).$$

La definición de grupo de homología se lee como «la homología es ciclos módulo fronteras». Los grupos de homología son *invariantes topológicas*. Los elementos de $H_k(K, \mathbb{F})$ son las clases de homología de K .

Observación. $H_k(\mathcal{C}_\bullet, d_\bullet)$ es un \mathbb{F} -espacio vectorial para toda $k \in \mathbb{Z}_+$.

Cuando $(C_\bullet, d_\bullet) = (C_\bullet(K), \partial_\bullet^K)$ es la cadena de complejos asociada al complejo simplicial K , los grupos de homología son llamados grupos de homología de K , denotado por $H_k(K)$ o $H_k(K, \mathbb{F})$.

Grupo de homología simplicial

Teorema 3.3. *El conjunto de clases de equivalencia de k -ciclos, con las operaciones de suma y producto escalar, es un espacio vectorial conocido como el espacio vectorial cociente, denotado por*

$$H_k(K) = \ker(\partial_k^K) / \text{Im}(\partial_{k+1}^K),$$

el cual es llamado el k -ésimo grupo de homología simplicial. Es decir, los vectores de $H_k(K)$ son las clases de equivalencia de k -ciclos homólogos.

Formamos un nuevo conjunto con aquellos ciclos que encierran los mismos agujeros, el conjunto de las clases de equivalencia, éste es el nuevo espacio vectorial. Los vectores son, en realidad, conjuntos. Podríamos pensar que contando el número de clases de equivalencia, la cardinalidad del espacio vectorial, obtendríamos el número de agujeros. No obstante, la suma de clases de equivalencia, como la definimos, permite contar con más de una clase de equivalencia para un mismo agujero.

En realidad, como estamos trabajando en un espacio vectorial, la base de este espacio vectorial nos da las clases necesarias para obtener, como una combinación lineal, todas las clases del k -ésimo grupo de homología. De esta manera, el número de clases de la base del grupo de homología nos indica el número de agujeros que tiene un complejo simplicial, y es así que se definen los números de Betti.

Número de Betti

Definición 3.14. Como $H_k(K, \mathbb{F})$ es de dimensión finita, la dimensión

$$\beta_k(K, \mathbb{F}) = \dim(H_k(K, \mathbb{F}))$$

es llamado el k -ésimo número de Betti de K .

En particular, como estamos trabajando con el campo \mathbb{Z}_2 , abreviamos

$$\beta_k(K) = \dim(H_k(K)).$$

El k -ésimo número de Betti cuenta el número de agujeros k -dimensionales. Se pueden usar para hacer distinciones entre espacios.

β_0 corresponde al número de componentes conexas en un espacio.

β_1 corresponde al número de agujeros en un espacio.

β_2 corresponde al número de vacíos encerrados por un espacio.

Ya con esta información, podemos calcular de manera intuitiva algunos números Betti a manera de ejemplificación. Consideramos un vértice, un cubo, una esfera y un toro.

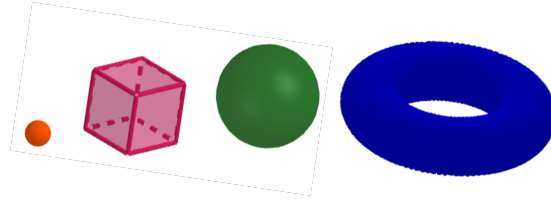


Figura 14: Vértice, cubo, esfera y toro

Por ejemplo, un punto constituye una única componente conexa. Ahora, el cubo hueco sí tiene un vacío dentro de todas sus caras, al igual que la esfera. El toro, tiene dos agujeros en el espacio porque su centro se puede atravesar por dos lados distintos.

Espacio	β_0	β_1	β_2
Punto	1	0	0
Cubo	1	0	1
Esfera	1	0	1
Toro	1	2	1

Cuadro 1: Números Betti de ejemplos de espacios

Con estos números nos podemos dar una idea del tipo de análisis que hace la topología a diferencia de la geometría, pues claramente un cubo es muy distinto de una esfera geoméricamente hablando. Sin embargo, topológicamente hablando, obtenemos la misma información de ambas figuras. En [9] ya hay un código para una función que regresa valores de número de Betti, sin embargo, nosotros nos conformaremos con el siguiente teorema.

Cálculo de números de Betti

Teorema 3.4. Sean K un complejo simplicial y K_k el conjunto de todos los simplejos k -dimensionales de K . Si r_k es el rango (∂_k^K) para toda dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, entonces

$$\beta_k(K) = \#K_k - (r_k + r_{k+1}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \beta_k(K) &= \dim(\ker(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})) \\ &= \dim(\ker(\partial_k)) - \dim(\text{Im}(\partial_{k+1})) \\ &= \dim(\ker(\partial_k)) - r_{k+1} \\ &= \#K_k - \dim(\text{Im}(\partial_k)) - r_{k+1} = \#K_k - r_k - r_{k+1}. \end{aligned}$$

■

Ahora formalizamos un comentario previo sobre los grupos de homología y lo mismo resulta para los números de Betti.

Teorema 3.5. *Los grupos de homología simplicial y los números de Betti son invariantes homotópicos: si K y L son complejos simpliciales cuyas realizaciones geométricas son homotópicamente equivalentes, entonces sus grupos de homología son isomorfismos y sus números de Betti son los mismos.*

A una nube de puntos le asociamos un complejo simplicial y si queremos estudiar su estructura podemos inflar cada punto para obtener bolas que serían una cubierta. El nervio de esta cubierta es el complejo de Čech que, por el teorema del nervio, es homotópicamente equivalente a la unión de las bolas, por lo que el complejo y la unión tiene los mismos grupos de homología y los mismos números de Betti.

Una función simplicial $f : K \mapsto L$ induce un homeomorfismo de grupos

$$C_k f : C_k(K) \mapsto C_k(L).$$

Si tenemos una función simplicial, buscaremos cómo relacionar las respectivas cadenas de complejos y los respectivos grupos de homología a partir de la función simplicial.

Funciones de cadenas

Definición 3.15. Sean $f : K \mapsto L$ una función simplicial y \mathbb{F} un campo. Para cada dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, sea $C_k f : C_k(K) \mapsto C_k(L)$ la función \mathbb{F} -lineal entre cadenas de grupos definida sobre cada k -simplejo básico σ de K :

$$C_k f(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma), & \text{si } \dim(f(\sigma)) = k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función lleva cadenas k dimensionales a cadenas k dimensionales siempre que $\dim(f(\sigma)) = k$. La razón por la que mandamos algunos de estos simplejos al cero es porque si $\dim(f(\sigma)) \neq k$, f no es inyectiva en los vértices de σ . Así, $f(\sigma)$ no sería un básico de $C_k(L)$. Resulta pues que las funciones de cadenas conmutan.

$$\begin{array}{ccc} C_k(K) & \xrightarrow{\partial_k^K} & C_{k-1}(K) \\ C_k f \downarrow & & \downarrow C_{k-1} f \\ C_k(L) & \xrightarrow{\partial_k^L} & C_{k-1}(L) \end{array}$$

Figura 15: Funciones de cadenas

Teorema 3.6. Para cada dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, y cada k -simplejo γ de K

$$\partial_k^L \circ C_k f = C_{k-1} f \circ \partial_k^K.$$

Demostración. Tenemos dos casos.

(i) $\dim(f(\gamma)) = k$. En este caso $C_k f(\gamma) = f(\gamma)$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_k^L \circ C_k f(\gamma) &= \partial_j^L(f(\gamma)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \cdot f(\gamma)_{-i}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\partial_k^K(\gamma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \gamma_{-i}.$$

Como f es inyectiva en los vértices de γ , entonces $\dim(\gamma_{-i}) = k - 1$. Así que $C_{k-1} f(\gamma_{-i}) = f(\gamma_{-i}) = f(\gamma)_{-i}$

$$\begin{aligned} C_{k-1} f \circ \partial_k^K(\sigma) &= C_{k-1} f \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \gamma_{-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_{k-1} f(\gamma_{-i}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i f(\gamma)_{-i}. \end{aligned}$$

(ii) $\dim(f(\gamma)) < k$. En este caso, $C_j f(\gamma) = \mathbf{0}$. Así que

$$\partial_k^L \circ C_j f(\gamma) = \partial_k^L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Sean o_K y o_L orientaciones de K y L de manera que f preserve la orientación:

$$o_K(v) \leq o_K(v') \implies o_L(f(v)) \leq o_L(f(v')).$$

Escribiendo a γ de forma o_K -orientada (v_0, v_1, \dots, v_j) , entonces $f(v_p) = f(v_{p+1})$ para algún $p \in \{0, \dots, k\}$. Observemos que f no es inyectiva en las caras γ_{-i} salvo quizá, γ_{-p} y $\gamma_{-(p+1)}$. Por tanto, $C_{k-1} f(\gamma_{-i}) = 0$ para $i \neq p, p+1$. Entonces

$$\begin{aligned} C_{k-1} f \circ \partial_k^K(\gamma) &= C_{k-1} f \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \gamma_{-i} \right) \\ &= (-1)^p f(\gamma_{-p}) + (-1)^{p+1} f(\gamma_{-(p+1)}) \\ &= (-1)^p [f(\gamma_{-p}) - f(\gamma_{-(p+1)})] = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

■

Como consecuencia de este resultado, podemos utilizar la función simplicial

$$f : K \mapsto L$$

para producir una sucesión de funciones transformaciones lineales $C_\bullet f : C_\bullet K \mapsto C_\bullet L$ entre los grupos de cadena.

Cadena de funciones

Definición 3.16. Una cadena de funciones ϕ_\bullet de (C_\bullet, d_\bullet) a (C'_\bullet, d'_\bullet) se define como una sucesión de funciones \mathbb{F} -lineales $\{\phi_k : C_k \mapsto C'_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$ tal que

$$d'_k \circ \phi_k = \phi_{k-1} \circ d_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Entonces podemos generalizar el teorema 3.6 a cadenas de funciones.

Observación. Funciones simpliciales $f : K \mapsto L$ inducen cadenas de funciones

$$C_\bullet f : (C_\bullet(K), \partial_\bullet^K) \mapsto (C_\bullet(L), \partial_\bullet^L).$$

Contamos con una manera de asociar cadenas de complejos partiendo de una función simplicial. Solo nos falta asociar grupos de homología de dos complejos partiendo de la misma función simplicial.

Teorema 3.7. Sea $\phi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \mapsto (C'_\bullet, d'_\bullet)$ una cadena de funciones. Para toda dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$, existe una función \mathbb{F} -lineal bien definida

$$H_k \phi : H_k(C_\bullet, d_\bullet) \mapsto H_k(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

inducida por ϕ_\bullet .

Demostración. Queremos definir una función $\ker(d_k) / \text{Im}(d_{k+1}) \xrightarrow{H_k \phi} \ker(d'_k) / \text{Im}(d'_{k+1})$. Vamos a demostrar que ϕ_k envía $\ker(d_k)$ a $\ker(d'_k)$ e $\text{Im}(d_{k+1})$ a $\text{Im}(d'_{k+1})$.

Sea $\gamma \in \ker(d_k)$, es decir $d_k(\gamma) = \mathbf{0}$, entonces $d'_k \circ \phi_k(\gamma) = \phi_{k-1} \circ d_k(\gamma) = \mathbf{0}$, lo que implica $d'_k(\phi_k(\gamma)) = \mathbf{0}$, es decir, $\phi_k(\gamma) \in \ker(d'_k)$.

Sea $\alpha \in \text{Im}(d_{k+1})$. Existe $\beta \in C_{k+1}$ tal que $d_{k+1}(\beta) = \alpha$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_k(\alpha) &= \phi_k \circ d_{k+1}(\beta) = d'_{k+1} \circ \phi_{k+1}(\beta) \\ \phi_k(\alpha) &= d'_{k+1}(\phi_{k+1}(\beta)) \implies \phi_k(\alpha) \in \text{Im}(d'_{k+1}). \end{aligned}$$

■

Que $H_k\phi$ sea una función lineal bien definida significa que ϕ_k manda el $\ker(d_k)$ al $\ker(d'_k)$ y la $\text{Im}(d_{k+1})$ a la $\text{Im}(d'_{k+1})$. Esto se usa dentro de la demostración.

Observación. Dada una función simplicial $f : K \mapsto L$, tenemos una cadena de funciones $C_\bullet f : C_\bullet(K) \mapsto C_\bullet(L)$ y esta induce una función

$$H_k(C_\bullet f) : H_k(K, \mathbb{F}) \longmapsto H_k(L, \mathbb{F}).$$

Entonces, lo que relaciona grupos de homología de dos complejos simpliciales es la función $H_k\phi$ bien definida.

Notación. Para evitar estar escribiendo $H_k(Cf)$ cada vez que se quiera mencionar esta función inducida, lo abreviaremos a $H_k f : H_k(K, \mathbb{F}) \mapsto H_k(L, \mathbb{F})$.

Observación. Si $f : \text{id}_K : K \mapsto K$ entonces $H_k f$ es la identidad en $H_k(K, \mathbb{F})$.

El siguiente teorema (3.8) nos dice que la composición de homología de cadenas de funciones se respeta. Nos permite usar transformaciones lineales entre grupos de homología para ver el comportamiento de cualquier función simplicial en términos de homología.

Teorema 3.8. *Dadas dos cadenas de funciones*

$$\phi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \longmapsto (C'_\bullet, d'_\bullet) \quad \wedge \quad \psi_\bullet : (C'_\bullet, d'_\bullet) \longmapsto (C''_\bullet, d''_\bullet)$$

entonces

$$H_k(\psi \circ \phi) = H_k\psi \circ H_k\phi$$

para toda dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$.

Una cadena de funciones ϕ_\bullet es un isomorfismo si cada $\phi_k : C_k \mapsto C'_k$ es un isomorfismo de C_k a C'_k . Para tal ϕ , las funciones inducidas $H_k\phi$ también son isomorfismos. No obstante, en general $H_k\phi$ puede ser un isomorfismo incluso si ϕ_\bullet no lo es.

Cuasi-isomorfismo

Definición 3.17. Una cadena de funciones $\phi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \mapsto (C'_\bullet, d'_\bullet)$ es un cuasi-isomorfismo si la función inducida $H_k\phi$ es un isomorfismo para cada dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$.

Ahora desarrollamos una teoría de la homotopía para las cadenas de funciones. La siguiente es una relación de equivalencia entre el conjunto de todas las funciones de cadena entre un par fijo de complejos de cadena.

Cadena de homotopías

Definición 3.18. Una cadena de homotopías η_\bullet entre cadenas de funciones $\phi_\bullet, \psi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \mapsto (C'_\bullet, d'_\bullet)$ es una colección de funciones \mathbb{F} -lineales

$$\eta : C_k \mapsto C'_{k+1}$$

tales que $\phi_k - \psi_k = \eta_{k-1} \circ d_k + d'_{k+1} \circ \eta_k$.

Entonces, el operador frontera cada vez que reduce la dimensión en uno, η la vuelve a subir. Escribimos $\eta_\bullet : \phi_\bullet \Rightarrow \psi_\bullet$ para indicar que η_\bullet es una cadena de homotopías, y las funciones ϕ_\bullet y ψ_\bullet son cadenas homotópicas siempre que η_\bullet exista.

Las transformaciones lineales η_k no necesitan conmutar con d, d', ϕ o ψ . Pero sí se comportan como en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \rightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{d_k} & C_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & & \\
 & & & \searrow^{\eta_{k+1}} & & \searrow^{\eta_k} & & \searrow^{\eta_{k-1}} & & \searrow^{\eta_{k-2}} & \\
 & & & \psi_{k+1} & & \psi_k & & \psi_{k-1} & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & & \phi_{k+1} & & \phi_k & & \phi_{k-1} & & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & \rightarrow & C'_{k+1} & \xrightarrow{d'_{k+1}} & C'_k & \xrightarrow{d'_k} & C'_{k-1} & \xrightarrow{d'_{k-1}} & &
 \end{array}$$

Figura 16: Cadena de homotopías

Una cadena de homotopías juegan el papel de la homotopía en funciones continuas entre espacios topológicos. Hay que tener en cuenta que las cadenas no son fáciles de encontrar.

Teorema 3.9. Sean $\phi_\bullet, \psi_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \mapsto (C'_\bullet, d'_\bullet)$ cadenas de homotopías, entonces las funciones inducidas a los grupos de homología coinciden

$$H_k \phi = H_k \psi.$$

Demostración. Sea $\eta_\bullet : \phi_\bullet \Rightarrow \psi_\bullet$ una cadena de homotopía. Para cualquier cadena $\gamma \in \ker(d_k)$, la definición de cadena de homotopías (3.18) nos da

$$\phi_k(\gamma) - \psi_k(\gamma) = \eta_{k-1} \circ d_k(\gamma) + d'_{k+1} \circ \eta_k(\gamma).$$

Pero $d_k(\gamma) = 0$, así que el primer término en el lado derecho desaparece,

$$\phi_k(\gamma) - \psi_k(\gamma) = d'_{k+1} \circ \eta_k(\gamma) \in \text{Im}(d'_{k+1}).$$

Por lo tanto, la diferencia siempre es una k -frontera, que es indetectable por homología. ■

Esto es lo que se usa para obtener un criterio para cuando dos complejos simpliciales tienen la misma homología, el cual es el papel de la equivalencia homotópica entre funciones.

3.3. Aspectos estadísticos de la inferencia homológica

Cuando generamos una cubierta para una nube de puntos, una pregunta natural sería ¿qué tanto hay que inflar cada punto para obtener una buena cubierta de forma que no perdamos información sobre los datos? O, ¿qué podemos esperar de esa inflación? Para esto es necesario contar con axiomas sobre los datos.

Axioma

Los datos se presentan como una nube de puntos muestreada de un subconjunto compacto K de un espacio euclidiano \mathbb{R}^d .

El objetivo general es reconstruir las características topológicas y geométricas, como los números de Betti, de este subconjunto a través de la información dada por la nube de puntos. Muchas preguntas en análisis de datos se pueden establecer de forma natural como una inferencia de dichas características geométricas y topológicas del objeto topológico desconocido. Por ejemplo, el número de subgrupos de los cuales una nube de puntos es dividida está relacionado con el número de componentes de este objeto desconocido.

Usar solamente las distancias tiene el problema de que no se llevan bien con el ruido y los valores atípicos. Se necesita una estimación robusta de las invariantes geométricas y topológicas.

Axioma

Toda nube de puntos incluye ruido, aleatoriedad y valores atípicos.

Vamos a definir una distancia entre conjuntos. Empezamos definiendo la distancia entre un punto y un conjunto.

Definición 3.19. Dado un espacio métrico (M, ρ) , el conjunto $\mathcal{K}(M)$ consiste de los subconjuntos compactos no vacíos. Dados $K \in \mathcal{K}(M)$ y $x \in M$, definimos la distancia de x a K como

$$\rho(x, K) = \inf\{\rho(x, y) : y \in K\}.$$

Dado que la distancia entre un punto y un conjunto es una función continua, porque las funciones distancia son continuas, de análisis matemático sabemos que las funciones continuas definidas en conjuntos compactos alcanzan sus máximo y mínimo, por lo que

$$\rho(x, K) = \min\{\rho(x, y) : y \in K\}.$$

ε -contrapeso

Definición 3.20. Dados $K \in \mathcal{K}(M)$ y $\varepsilon > 0$, definimos la ε -vecindad tubular o ε -contrapeso de K como

$$K^\varepsilon = \{x \in M : \rho(x, K) \leq \varepsilon\}.$$

La ε -vecindad tubular es el conjunto de azul en la figura 14. Son todos los puntos cuya distancia al conjunto K sean menor o igual a ε .

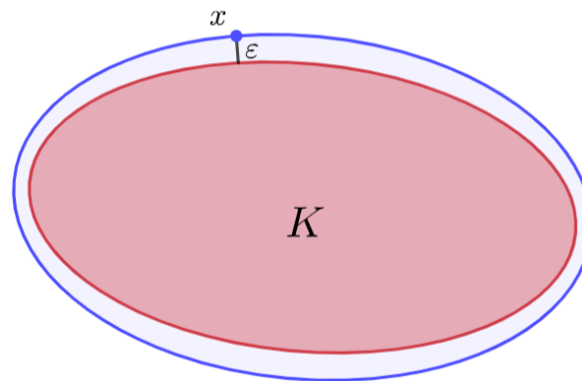


Figura 17: ε -contrapeso

Es decir, si $x \in K^\varepsilon$, existe $y \in K$ tal que $\rho(y, x) \leq \varepsilon$. Esto es, $x \in \overline{B}(y, \varepsilon)$. Por lo tanto, inflar ε al conjunto K significa unir todas las bolas cerradas de radio ε en todos los puntos de K . Así,

$$K^\varepsilon = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, \varepsilon).$$

Cuando tenemos un nube de puntos, esta unión de bolas es la que consideramos para el complejo de Čech. En otras palabras, el ε -contrapeso es lo que nos da el complejo de Čech. Ahora vamos a definir la función distancia que usamos para el complejo de Čech.

Función distancia

Definición 3.21. Dado $\mathcal{K}(M)$, definimos la **función distancia** $\rho_K : M \mapsto \mathbb{R}$ como

$$\rho_K(x) = \rho(x, K).$$

En este sentido, tenemos al conjunto K fijo y la variable es el punto x .

Observación. La función distancia ρ_K es continua y

$$|\rho_K(x) - \rho_K(y)| \leq \rho(x, y).$$

Fijémonos en las siguientes equivalencias;

$$\begin{aligned} x \in K^\varepsilon &\iff \rho(x, K) \leq \varepsilon \\ &\iff \rho_K(x) \leq \varepsilon \iff x \in \rho_K^{-1}([0, \varepsilon]). \end{aligned}$$

Entonces podemos pensar al ε -contrapeso como la imagen inversa de la función distancia del intervalo $[0, \varepsilon]$. Esta imagen inversa tiene un nombre particular.

Conjunto de nivel

Definición 3.22. Dados $K \in \mathcal{K}(M)$ y $r \geq 0$, definimos el **conjunto de nivel r de ρ_K** como $\rho_K^{-1}([0, r])$.

Observación.

$$\rho_K^{-1}([0, r]) = K^r.$$

Ahora definimos la distancia entre conjuntos.

Métrica de Hausdorff

Definición 3.23. Dados $K, L \in \mathcal{K}(M)$, definimos la **distancia de Hausdorff** de K y L como

$$\rho_H(K, L) = \inf \{ \varepsilon > 0 : K \subset L^\varepsilon \wedge L \subset K^\varepsilon \}.$$

En la definición de la métrica de Hausdorff aparecen las condiciones $K \subset L^\varepsilon$ y $L \subset K^\varepsilon$, lo que significa que si a L lo inflamos ε , K queda dentro y lo mismo para L sin inflamos ε a K . Entonces, dos conjuntos compactos, con la métrica de Hausdorff están ε cercanos si se parecen; es decir, si ε es pequeña es porque no tuvimos que inflar mucho a K y a L para que se cumplieran las condiciones. Además, esta inflación coincide con el ε -contrapeso de una nube de puntos.

Teorema 3.10. *Dados $K, L \in \mathcal{K}(M)$, la distancia Hausdorff $\rho_H(K, L)$ entre K y L está definida por cualquiera de las siguientes afirmaciones:*

1. $\rho_H(K, L) = \inf \{ \varepsilon > 0 : K \subset L^\varepsilon \wedge L \subset K^\varepsilon \}$
2. $\rho_H(K, L) = \max \{ \sup \{ \rho(y, K) : y \in L \}, \sup \{ \rho(x, L) : x \in K \} \}$
3. $\rho_H(K, L) = \sup \{ |\rho_K(x) - \rho_L(y)| : x \in M \}$.

Estas equivalencias sirven tanto computacionalmente como analíticamente porque solamente la función distancia causa problemas de ruido y de valores atípicos para poder aproximar. Esto es, que sea robusta.

Observación. La propiedad más importante de la función distancia para la inferencia es la estabilidad: si un conjunto compacto K' es una buena aproximación Hausdorff a otro conjunto compacto K , entonces las funciones distancias $\rho_{K'}$ y ρ_K son cercanas entre ellas. Sin embargo, mientras la función distancia es apenas perturbada bajo ruido Hausdorff, añadir solo un valor atípico la puede cambiar dramáticamente.

Una manera de resolver el problema de los valores atípicos para una inferencia basada en distancias es tratar de reemplazar la función distancia usual a un conjunto K por otra noción de función distancia que sea robusta a la adición de cierto número de valores atípicos.

Por convención, supongamos que $X_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es un subconjunto de \mathbb{R}^d de observaciones independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo a una medida de probabilidad P con soporte compacto $M \subset \mathbb{R}^d$. Esto significa que vamos a considerar al conjunto $P^{-1}((0, 1])$, el intervalo es abierto en el 0 porque queremos quitar aquellas observaciones que tengan probabilidad 0, los valores atípicos.

Para inferir información topológica sobre M a partir de P :

1. X_n es cubierto por una unión de bolas de radio fijo centradas en los puntos x_i . Bajo ciertas suposiciones de regularidad sobre M , se puede relacionar esta unión de bolas con una de M .
2. Desde una perspectiva práctica y algorítmica, las características de M se inferen usando el nervio de la unión de bolas, usando el teorema del nervio.

Los conjuntos compactos que utilizaremos son la nube de puntos X_n y el soporte M de P .

Dada una subvariedad compacta suave M de \mathbb{R}^k y una aproximación X_n de M , el teorema 5.2 de [2] demuestra que los r -contrapesos X_n^r de X_n son homotópicamente equivalentes a M para valores bien elegidos de r .

3.4. Homología persistente

La homología persistente se puede utilizar para medir la escala de una característica topológica. Como se explica en [5], el ruido en la forma de los datos nos obliga a tra-

bajar con la homología. Se usa una filtración dependiente de un parámetro para capturar cambios topológicos a través de la gama de escalas y almacenar esta información en un diagrama de persistencia.

Filtraciones

Definición 3.24. El subconjunto T puede ser finito o infinito. En general, una **filtración** de un espacio topológico M es una familia anidada de subespacios $(M_r)_{r \in T}$, donde $T \subset \mathbb{R}$, tales que para cualesquiera $r, r' \in T$, si $r \leq r'$, entonces $M_r \subset M_{r'}$, y $M = \bigcup_{r \in T} M_r$.

Una **filtración de un complejo simplicial** K es una familia anidada de subcomplejos $(K_r)_{r \in T}$, donde $T \subset \mathbb{R}$, tal que $K_r \subset K_{r'}$ para cualesquiera $r, r' \in T$ con $r \leq r'$ y

$$K = \bigcup_{r \in T} K_r.$$

Por ejemplo, si $f : M \mapsto \mathbb{R}$ es una función, entonces la familia $f^{-1}((-\infty, r])$, con $r \in \mathbb{R}$, define la filtración llamada la **filtración de conjuntos de nivel de f** .

Para construir filtraciones sobre datos hacemos lo siguiente. Dado un subconjunto X de un espacio métrico compacto (M, ρ) , las familias de complejos de Vietoris-Rips $(VR_r(X))_{r \in \mathbb{R}}$ y de complejos de Čech $(C_r(X))_{r \in \mathbb{R}}$ son filtraciones. Si X es una nube de puntos en \mathbb{R}^d , por el teorema del nervio, la filtración $(C_r(X))_{r \in \mathbb{R}}$ codifica la topología de la familia de uniones de bolas X^r , conforme r va de 0 a ∞ .

Las funciones definidas sobre los vértices de un complejo simplicial dan lugar a otro ejemplo importante de filtración: sea K un complejo simplicial con conjunto de vértices V y $f : V \mapsto \mathbb{R}$. Entonces f puede ser extendida a todos los simplejos de K por

$$f(\{v_0, \dots, v_k\}) = \max\{f(v_i) : i \in \{0, \dots, k\}\},$$

para cada simplejo $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in K$ y la familia de subcomplejos $K_r = \{\sigma \in K : f(\sigma) \leq r\}$ define una filtración llamada la **filtración de conjuntos de subnivel de f** . De manera análoga, se puede definir la **filtración de conjuntos de súpernivel de f** .

Consideremos una filtración del complejo simplicial K ,

$$F_0K \subsetneq F_1K \subsetneq \dots \subsetneq F_{n-1}K \subsetneq F_nK = K.$$

Los complejos de cadenas filtradas surgen naturalmente en situaciones en las que tenemos una secuencia de inclusiones de espacios.

Sea $g_i : F_iK \hookrightarrow F_{i+1}K$ la inclusión. Consideremos las funciones inducidas sobre los grupos de homología $H_k g_i : H_k(F_iK) \mapsto H_k(F_{i+1}K)$ para toda dimensión $k \in \mathbb{Z}_+$. Para un $k \in \mathbb{Z}_+$ fijo tenemos

$$H_k(F_0K) \xrightarrow{H_k g_0} H_k(F_1K) \xrightarrow{H_k g_1} \dots \xrightarrow{H_k g_{n-2}} H_k(F_{n-1}K) \xrightarrow{H_k g_{n-1}} H_k(F_nK).$$

Lo que tenemos aquí es una sucesión arbitraria de \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales con dimensión finita conectados por una transformación lineal.

Observación. Para la composición de las inclusiones $g_1 \circ g_0 : F_0K \hookrightarrow F_2K$ tenemos que

$$H_k(g_1 \circ g_0) = H_k g_1 \circ H_k g_0.$$

Notación. Para $i < j$, la inclusión $g_{i \rightarrow j} : F_i K \hookrightarrow F_j K$, tenemos

$$H_k g_{i \rightarrow j} = H_k g_j \circ H_k g_{j-1} \circ \cdots \circ H_k g_{i+1} \circ H_k g_i.$$

Las funciones $H_k g_{i \rightarrow j}$ nos darán información para conectar los k -ésimos grupos de homología de todos los subcomplejos que aparecen en la filtración.

Si el ciclo representativo $\gamma \in \ker \left(\partial_k^{F_i K} \right)$ «encierra» un agujero en $F_i K$, el cual es «llenado» en $F_j K$, tenemos que la clase $c \in H_k(F_j K)$, tenemos que c es llevado a cero en $H_k(F_j K)$ por $H_k g_{i \rightarrow j}$. En general, si $(F_r)_{r \in T}$ es una filtración de un complejo simplicial o un espacio topológico, dada $k \in \mathbb{Z}_+$, considerando los grupos de homología $H_k(F_r)$ obtenemos una sucesión de espacios vectoriales en donde las inclusiones $F_r \subset F_{r'}$, con $r \leq r'$, inducen transformaciones lineales entre $H_k(F_r)$ y $H_k(F_{r'})$.

Módulo de persistencia

Definición 3.25. Un **módulo de persistencia** \mathbb{Z}_+ -indexado sobre \mathbb{F} es una sucesión (V_\bullet, a_\bullet) de espacios \mathbb{F} -vectoriales V_k y transformaciones lineales a_k , definidos de forma

$$V_{k_0} \xrightarrow{a_{k_0}} V_{k_1} \xrightarrow{a_{k_1}} V_{k_2} \xrightarrow{a_{k_2}} \cdots \xrightarrow{a_{k_{i-1}}} V_{k_i} \xrightarrow{a_{k_i}} V_{k_{i+1}} \xrightarrow{a_{k_{i+1}}} \cdots$$

Si se quisiera un módulo de persistencia que fuera finito hasta n , solo se tendría que usar la transformación identidad después del n -ésimo espacio vectorial.

Observación. No se pide $a_{k_i} \circ a_{k_{i-1}} = \mathbf{0}$.

Con esta definición de persistencia tenemos una infinidad de espacios vectoriales con una infinidad de matrices entre ellos, lo que resulta algo complicado de manejar. Entonces intentaremos reemplazarlos con espacios más simples que contengan la misma información.

Notación. Para $i \leq j$, $a_{i \rightarrow j} : V_i \mapsto V_j$ está dada por

$$a_{i \rightarrow j} = a_j \circ a_{j-1} \circ \cdots \circ a_{i+1} \circ a_i,$$

con el entendimiento implícito de que $a_{i \rightarrow j}$ es tan sólo la función identidad en V_i .

Isomorfismos

Definición 3.26. Decimos que el módulo de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) es de tipo finito si $\dim(V_k) < \infty$ para toda $k \in \mathbb{Z}_+$ y si las transformaciones $a_k : V_k \mapsto V_{k+1}$ son **isomorfismos**.

Pasamos ahora a los objetos de interés.

Grupo de homología persistente

Definición 3.27. Para toda $i \leq j$, el **grupo de homología persistente** asociado al módulo de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) es el subespacio de V_j dado por

$$PH_{i \rightarrow j}(V_\bullet, a_\bullet) = \text{Im}(a_{i \rightarrow j}).$$

Decimos que la dimensión de este subespacio

$$\beta_k^{i,j} = \dim(PH_{i \rightarrow j}),$$

es el k -ésimo número persistente de Betti.

Observación. Dada una filtración $(F_r)_{r \in T}$ de un complejo simplicial o un espacio topológico, la homología de F_r cambia conforme r incrementa: pueden aparecer nuevas componentes, componentes existentes se pueden unir en una sola, ciclos y agujeros pueden aparecer o ser llenados, etc.

Observación. El grupo contiene todas las clases k -dimensionales a nivel j que ya tenían representantes vivos en $F_i K$. Es decir, son aquellas clases de equivalencia de k -ciclos en $F_i K$ que no se convierten en k -fronteras en $F_j K$.

El correspondiente número persistente de Betti cuenta los agujeros k -dimensionales que existen todo el camino desde $F_i K$ hasta $F_j K$. Estamos interesados en clases particulares: la clase con el menor índice i y mayor índice j , tal que la clase es no trivial en todo el intervalo completo de $F_i K$ a $F_j K$.

Persistencia

Definición 3.28. Decimos que un vector $\vec{v} \in V_i$ **nace** con índice de filtración i si $\vec{v} \notin \text{Im}(a_{i-1})$; decimos que \vec{v} **muere** con índice de filtración $j \geq i$ si j es el mínimo número tal que $a_{i \rightarrow j}(\vec{v}) = \mathbf{0}$. La **persistencia** de \vec{v} se define como muerte menos nacimiento: $j - i$.

El grupo $PH_k g_{i \rightarrow j}(F_\bullet K)$ contiene aquellas clases de homología en $H_k(F_i K)$ que continúan generando homología no trivial en el complejo más grande $F_j K$. Geométricamente, estas son las clases de equivalencia de los k -ciclos en $F_i K$ que no se transforman en fronteras en $F_j K$.

Observación. Si consideramos los k -ésimos grupos de homología de una filtración de un complejo simplicial, denotamos los grupos de persistencia de homología como $PH_k g_{i \rightarrow j}(F_\bullet K)$, para toda $i \leq j$

$$PH_k g_{i \rightarrow j}(F_\bullet K) = H_k g_{i \rightarrow j}(\ker(\partial_k^i)) / H_k g_{i \rightarrow j}(\ker(\partial_k^i) \cap \text{Im}(\partial_{k+1}^j)).$$

Observación. Si $i = j$,

$$PH_k g_{i \rightarrow j}(F_\bullet K)$$

es el k -ésimo grupo de homología.

La homología persistente rastrea estos cambios, identifica las características nuevas y les asocia un «tiempo de vida». La información resultante es codificada como un conjunto de intervalos llamado un **código de barras** o, equivalentemente, un multiconjunto de puntos en \mathbb{R}^2 donde las coordenadas de cada punto son el punto inicial y el punto final de cada intervalo.

Morfismo

Definición 3.29. Un **morfismo** entre módulos de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) y (W_\bullet, b_\bullet) es una familia de funciones lineales $\phi_k : V_k \mapsto W_k$ tales que

$$b_i \circ \phi_i = \phi_{i+1} \circ a_i$$

para toda $i \in \mathbb{Z}_+$.

Esta definición equivale a exigir la conmutatividad de todos los cuadrados en el siguiente diagrama de espacios vectoriales:

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & \xrightarrow{a_0} & V_1 & \xrightarrow{a_1} & \cdots & \xrightarrow{a_{k-1}} & V_k & \xrightarrow{a_k} & V_{k+1} & \xrightarrow{a_{k+1}} & \\ \phi_0 \downarrow & & \phi_1 \downarrow & & & & \phi_k \downarrow & & \phi_{k+1} \downarrow & & \\ W_0 & \xrightarrow{b_0} & W_1 & \xrightarrow{b_1} & \cdots & \xrightarrow{b_{k-1}} & W_k & \xrightarrow{b_k} & W_{k+1} & \xrightarrow{b_{k+1}} & \end{array}$$

Figura 18: Conmutatividad de los morfismos

Decimos que $\phi_\bullet : (V_\bullet, a_\bullet) \mapsto (W_\bullet, b_\bullet)$ es un isomorfismo si todo ϕ_i es invertible.

Notación. $(V_\bullet, a_\bullet) \simeq (W_\bullet, b_\bullet)$ significa que los espacios vectoriales son isomorfos.

En muchos casos, un módulo de persistencia se puede descomponer como «suma directa» de **módulos de intervalos** $\mathbf{1}_{(b,d)}$ de la forma

$$\cdots \mapsto \mathbf{0} \mapsto \cdots \mapsto \mathbb{Z}_2 \mapsto \cdots \mapsto \mathbb{Z}_2 \mapsto \mathbf{0} \mapsto \cdots$$

donde las funciones $\mathbb{Z}_2 \mapsto \mathbb{Z}_2$ son las funciones identidad y las demás funciones son la transformación cero. Tal módulo se puede interpretar como que una característica apareció en el índice ínfimo del intervalo de los índices correspondientes a los espacios vectoriales no triviales y desapareció en el índice supremo.

Suma directa

Definición 3.30. La suma directa de los módulos de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) y (W_\bullet, b_\bullet) es un nuevo módulo de persistencia donde el k -ésimo espacio vectorial de $(V_\bullet \oplus W_\bullet, a_\bullet \oplus b_\bullet)$ es la suma directa

$$V_k \oplus W_k = \{\vec{v} + \vec{w} : \vec{v} \in V_k, \vec{w} \in W_k\}$$

$$\text{y } a_k \oplus b_k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ 0 & b_k \end{pmatrix}.$$

Los grupos de homología persistente de sumas directas son sumas directas de grupos de homología persistente. Decimos que un módulo de persistencia (I_\bullet, c_\bullet) es indescomponible si no admite una descomposición interesante como suma directa, es decir, si

$$(I_\bullet, c_\bullet) \simeq (V_\bullet, a_\bullet) \oplus (W_\bullet, b_\bullet)$$

entonces uno de los «factores» es isomorfo a (I_\bullet, c_\bullet) y el otro es nulo. Veamos cómo identificar aquellos módulos de persistencia que son indescomponibles. La demostración se encuentra en la página 73 de [10].

Teorema 3.11. Sea (I_\bullet, c_\bullet) un módulo de persistencia \mathbb{Z}_+ -indexado sobre un campo \mathbb{F} . Supongamos que existen índices $i \leq j$ con $i \in \mathbb{Z}_+$ y $j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ tales que

$$\dim(I_p) = \mathbf{1}_{\{i, \dots, j\}}(p) \quad \wedge \quad \text{rango}(c_p : I_p \mapsto I_{p+1}) = \mathbf{1}_{\{i, \dots, j\}}(p).$$

Entonces (I_\bullet, c_\bullet) es indescomponible.

Otro hecho importante que no se establece dentro del teorema (3.11) es que estos módulos de persistencia son los únicos indescomponibles.

Módulo-intervalo

Definición 3.31. Para todo par $i \in \mathbb{Z}_+$ y $j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, el **módulo-intervalo** $(I_{\bullet}^{i,j}, c_{\bullet}^{i,j})$ sobre \mathbb{F} está dado por

$$I_p^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{F} & i \leq p \leq j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \wedge \quad c_p^{i,j} = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{F}}, & i \leq p \leq j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando un módulo de persistencia $(V_{\bullet}, a_{\bullet})$ se puede descomponer como una suma directa de módulos de intervalos, se tiene que la descomposición es única salvo un reordenamiento de intervalos. El siguiente resultado nos permite expresar de forma única cualquier módulo de persistencia de tipo finito como una suma directa de un número finito de módulo-intervalos.

Teorema de Estructura

Teorema 3.12. Para cada módulo de persistencia \mathbb{Z}_+ -indexado de tipo finito sobre \mathbb{F} , existe un conjunto $\text{Bar}(V_{\bullet}, a_{\bullet})$ de parejas $i \in \mathbb{Z}_+$ y $j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ y una función $\mu : \text{Bar}(V_{\bullet}, a_{\bullet}) \mapsto \mathbb{N}$ tales que existe una descomposición en sumas directas

$$(V_{\bullet}, a_{\bullet}) \simeq \bigoplus_{[i,j]} (I_{\bullet}^{i,j}, c_{\bullet}^{i,j})^{\mu(i,j)}$$

donde los índices $[i, j]$ son los elementos de $\text{Bar}(V_{\bullet}, a_{\bullet})$. Más aún, esta suma es directa salvo isomorfismos.

La demostración requiere de técnicas de álgebra abstracta fuera del tema de la tesis, por lo que se omitirá. El Teorema de Estructura dice que todos estos módulos de persistencia de tipo finitos se pueden definir por un conjunto finito de intervalos, con cierta multiplicidad cada uno. Nos permite describir, salvo isomorfismos, a cualquier módulo de persistencia como una suma directa de módulos simples que no se pueden descomponer. Lo que se requiere es información combinatoria, no la estructura de una transformación lineal o algo por el estilo.

Código de barras

Definición 3.32. Para cada módulo de persistencia \mathbb{Z}_+ -indexado de tipo finito $(V_{\bullet}, a_{\bullet})$ sobre \mathbb{F} , la colección $\text{Bar}(V_{\bullet}, a_{\bullet})$ de intervalos $[i, j]$ y sus multiplicidades es llamado **código de barras** de $(V_{\bullet}, a_{\bullet})$.

Por ejemplo, sea $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ la siguiente función y $F_r = f^{-1}((-\infty, r])$ para $r \in \mathbb{R}$.

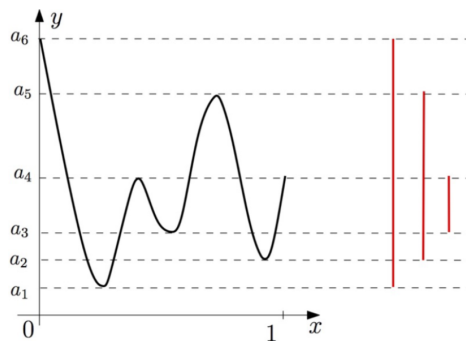


Figura 19: Función real valuada junto con su código de barras

El conjunto de intervalos obtenidos que codifican el lapso de vida de las diferentes características homológicas encontradas a lo largo de la filtración es el **código de barras de persistencia** de f .

Los códigos de barras son multi-conjuntos finitos de intervalos $[s, t] \subset \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Aquí, por multi-conjunto nos referimos a que cada intervalo $[s, t]$ puede tener diversas copias dentro del código de barras, el número exacto está dado por la función $\mu(s, t)$.

3.5. Filtros

Los grupos de homología nos han permitido caracterizar objetos topológicos a través de los números de Betti. También podemos expresarlos convenientemente como transformaciones lineales; es decir, todo el estudio de los grupos de homología se reduce al álgebra lineal. En contraste, en esta sección veremos cómo calcular algorítmicamente códigos de barra, haciendo uso del Teorema de Estructura, en el caso de un complejo simplicial filtrado cuando tomamos la k -ésima homología para todas las dimensiones k . Nuevamente, consideremos la filtración

$$F_0K \subsetneq F_1K \subsetneq \cdots \subsetneq F_{n-1}K \subsetneq F_nK = K.$$

Para todo simplejo $\sigma \in K$, sea $b(\sigma)$ el menor índice $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\sigma \in F_iK$. En otras palabras, $b(\sigma)$ es el nacimiento de σ .

Observación. b preserva órdenes:

$$\sigma \leq \tau \implies b(\sigma) \leq b(\tau).$$

Sea $g_{i \rightarrow j}$ la función inclusión $F_iK \hookrightarrow F_jK$. Veamos los grupos de persistencia homológica $PH_k g_{i \rightarrow j}(F_\bullet K)$.

0. Ordenamos los simplejos de K como $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ de manera que σ está antes que τ si

- (i) $b(\sigma) < b(\tau)$
(ii) $b(\sigma) = b(\tau)$ y $\sigma \leq \tau$ en K .

1. Entrada. Formamos una matriz $D \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que si $(p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$

$$D_{pq} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } \sigma_p \leq \sigma_q \text{ con } \dim(\sigma_q) - \dim(\sigma_p) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde el signo ± 1 depende de la orientación de los vértices de K ; en particular, este es el mismo signo que el que se usa en el operador de frontera algebraica de la definición (3.4).

Notación. $\text{col}(q)$ = columna de q

$\text{low}(q)$ = el mayor p tal que $D_{pq} \neq 0$ si existe, $\text{low}(q) = 0$ en otro caso.

Por ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente filtración.

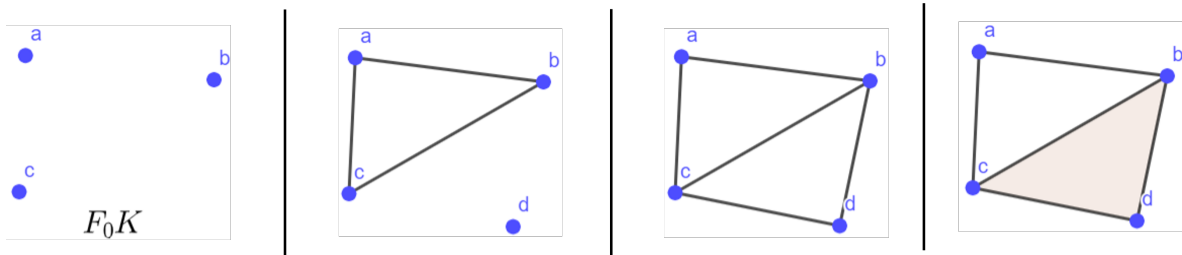


Figura 20: Filtración

Su correspondiente matriz D es la siguiente, en la que todas las entradas vacías son cero.

$$D = \begin{matrix} & a & b & c & d & ab & ac & bc & bd & cd & bcd \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ ab \\ ac \\ bc \\ bd \\ cd \\ bcd \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & & -1 & -1 & & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & -1 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

2. Pseudocódigo.

Al finalizar este procedimiento, se cumplirán las siguientes afirmaciones.

- Si la columna i está vacía, entonces σ_i es un simplejo *positivo* que *crea* una característica topológica.

-
1. **for** $q = 1$ to n **do**
 2. **Set** $p = \text{low}(q)$
 3. **while** some $r < q$, $\text{low}(r) = p \neq 0$ **do**
 4. **Add** $(-D_{pq}/D_{pr}) \cdot \text{col}(r)$ **to** $\text{col}(q)$
 5. **end while**
 6. **end for**
-

- Si la columna j no está vacía con $\text{low}(j) = k$, entonces σ_j es un simplejo *negativo* que *destruye* la característica topológica creada por σ_k .
- Por ejemplo, el simplejo bcd destruye el ciclo creado por bd y cd . Esto es, al añadir el triángulo bcd cierra el agujero, ahora es un triángulo relleno.

Para seguir estas características topológicas, debemos tener en cuenta cuáles son.

- Dimensión 0: *componentes conexas*
 - Dimensión 1: *ciclos*
 - Dimensión 2: *vacíos*
3. **Salida:** Este proceso modifica la matriz D por operaciones por columnas a una nueva matriz, la cual está relacionada a D a través de un cambio de base.

Observación. Cuando el algoritmo termina, la p -ésima fila de D' tenemos la menor entrada no cero $\text{low}(q)$ de a lo más una columnas q , si existe tal que la entrada D'_{pq} se llame *pivote*.

4. **Código de barras:** Para toda $k \in \mathbb{Z}_+$, dibujamos el código de barras $\text{Bar}_k(F_\bullet K)$ del módulo de persistencia obtenido al tomar los k -ésimos grupos de homología de $F_\bullet K$.

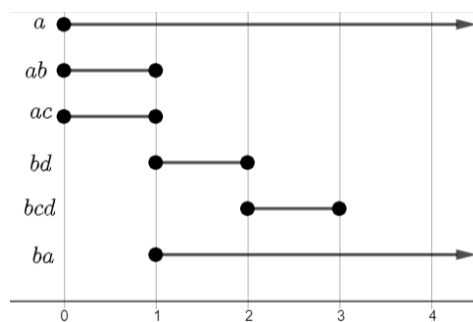


Figura 21: Código de barras de la filtración en cuestión

Se emite el código de barras $\{[0, \infty], [0, 1]^2, [1, 2]\}$ para homología persistente de dimensión 0 y el código de barras $\{[1, \infty], [2, 3]\}$ para homología persistente de dimensión 1. Podemos leer dichos códigos de barras, y por tanto determinar estos módulos de persistencia gracias al Teorema de Estructura, recorriendo las columnas de D' y aplicando este diagrama de flujo:

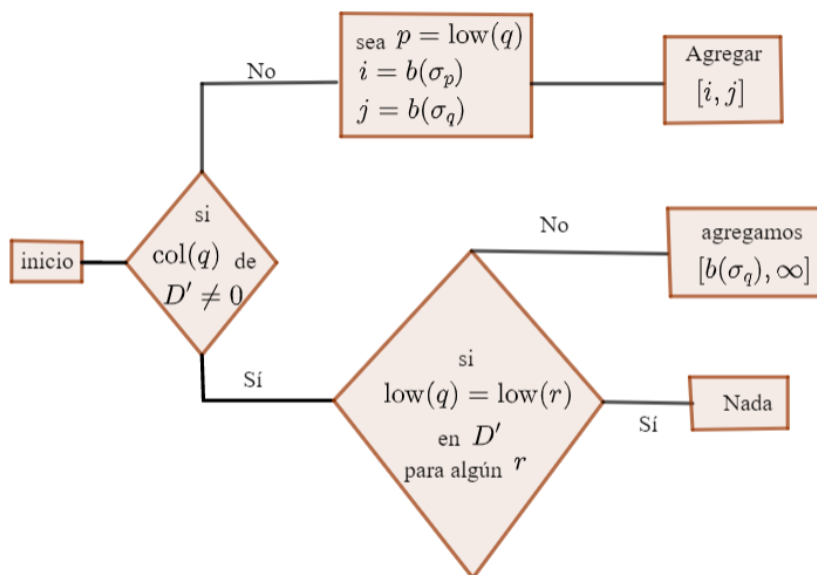


Figura 22: Diagrama de flujo del código de barras

Incluso en el pequeño ejemplo descrito anteriormente, es difícil realizar todo el algoritmo a mano.

3.6. Homología y aprendizaje de máquina

Regresando al ejemplo de la figura 19, cada intervalo (a, b) puede ser representado por un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. El conjunto resultante de puntos es llamado **diagrama de persistencia** de f .

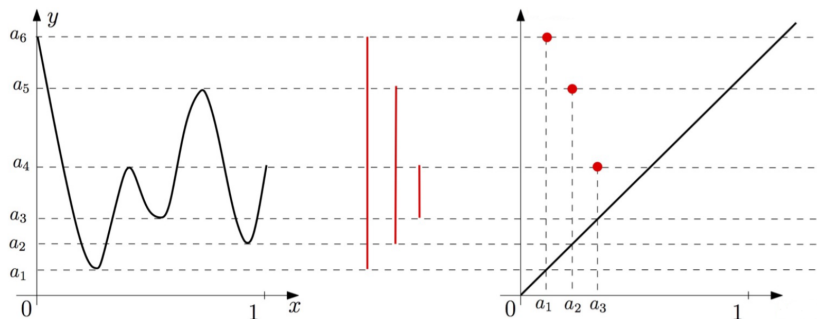


Figura 23: Función real valuada junto con su código de barras y su diagrama de persistencia

Observación. Una función puede tener varias copias del mismo intervalo en su código de barras. Por tanto, el diagrama de persistencia de f es de hecho un multi-conjunto donde cada punto tiene una multiplicidad entera. Al final, se añaden al diagrama de persistencia todos los puntos de la diagonal $\{(a, b) : a = b\}$ con multiplicidad infinita.

Diagrama de persistencia

Definición 3.33. Cada intervalo (b, d) en un código de barras puede ser representado como un punto de coordenadas $(b, d) \in \mathbb{R}^2$. La unión ajena de estos puntos, junto con la diagonal $\{(x, y) : x = y\}$ es un multiconjunto llamado el **diagrama de persistencia** de (V_\bullet, a_\bullet) .

Para ver el funcionamiento intuitivo de un diagrama de persistencia veamos la siguiente nube de puntos.

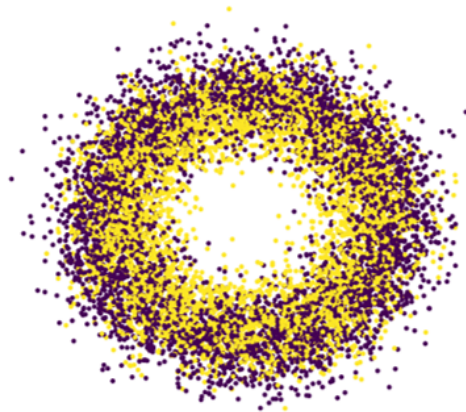


Figura 24: Nube de puntos

Generamos un complejo simplicial, ya sea, por ejemplo, el de Vietoris-Rips o el de Čech, a través de un ε de forma que nos queda el siguiente complejo simplicial. A la derecha, se muestra el respectivo diagrama de persistencia.

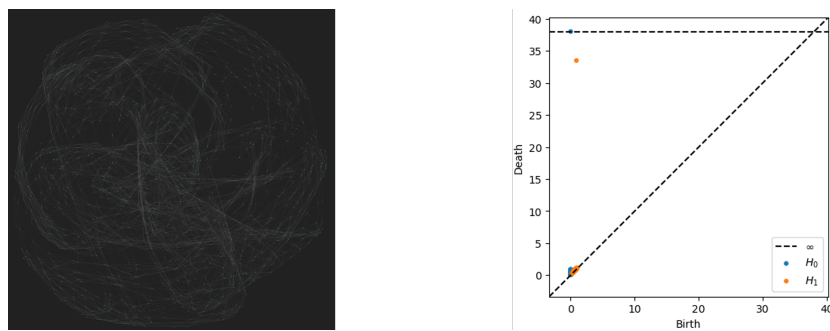


Figura 25: Complejo simplicial | Diagrama de persistencia

El diagrama de persistencia monitorea las características topológicas del complejo simplicial previamente definidas a través de una escala ε dada. En el eje x tenemos, a una escala, cuándo nació esta característica topológica. En el eje y tenemos indicado a qué escala ha sido destruida una característica topológica. En otras palabras, los ejes corresponden a los valores de ε en el que nacieron y murieron las características del

complejo. Además, en el diagrama de persistencia todos los puntos se encuentran por encima de la recta $y = x$.

Observación. La persistencia es la distancia vertical a la diagonal $y = x$. Además, están incluidos puntos de la forma (i, ∞) o bien con j representando ∞ .

En la definición (3.25) definimos módulos de persistencia que están discretizados. Ahora vamos a generalizarlos a módulos de persistencia continuos. Así podremos inducir una función distancia entre entre módulos de persistencia.

Módulos de persistencia continuos

Definición 3.34. Un **módulo de persistencia \mathbb{R}_+ -indexado** sobre \mathbb{F} es un par (V_\bullet, a_\bullet) que consiste en un espacio \mathbb{F} -vectorial V_t para cada número real $t \in \mathbb{R}_+$ y una transformación lineal $a_{s \leq t} : V_s \mapsto V_t$ para cada par $s \leq t$ no negativo de números reales; estas transformaciones deben satisfacer

1. $a_{t \leq t}$ es la transformación identidad sobre V_t para cada $t \in \mathbb{R}_+$, y
2. $a_{s \leq t} \circ a_{r \leq s} = a_{r \leq t}$ para cada tripleta $0 \leq r \leq s \leq t$ de números reales.

Siempre podemos reemplazar un (V_\bullet, a_\bullet) \mathbb{N} -indexado por un (V'_\bullet, a'_\bullet) \mathbb{R}_+ -indexado equivalente por interpolación. Simplemente usamos la función piso,

$$V'_t = V_{\lfloor t \rfloor} \quad \wedge \quad a'_{s \leq t} = a_{\lfloor s \rfloor \mapsto \lfloor t \rfloor}.$$

Si queremos garantizar códigos de barras para estos nuevos módulos de persistencia, debemos imponer algunas restricciones de ajuste.

Módulos de persistencia mansos

Definición 3.35. Un módulo de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) se dice que es **manso** si se cumplen dos propiedades:

1. los espacios vectoriales V_t son de dimensión finita para toda $t \in \mathbb{Z}_+$, y
2. solo hay un número finito de valores $t \in \mathbb{Z}_+$, llamados *valores críticos*, para los que la transformación $a_{t-\varepsilon \leq t+\varepsilon} : V_{t-\varepsilon} \mapsto V_{t+\varepsilon}$ falla al ser un isomorfismo para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeña.

La primera condición ya la traíamos con los módulos de persistencia discretizados. En cambio, la segunda condición hace que las transformaciones a_\bullet se parezcan a sus contrapartes discretizadas para valores t suficientemente separados. Entonces podemos usar el teorema de estructura para módulos continuos.

Ahora podemos encontrar distancias entre módulos de persistencia que no serán enteros. El siguiente concepto es fundamental para este propósito.

ε -entrelazamiento

Definición 3.36. Para cualquier $\varepsilon \geq 0$, un ε -**entrelazamiento** entre módulos de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) y (W_\bullet, b_\bullet) consiste en dos familias de transformaciones lineales

$$\{\Phi_t : V_t \mapsto W_{t+\varepsilon} \mid t \geq 0\} \quad \wedge \quad \{\Psi_t : W_t \mapsto V_{t+\varepsilon} \mid t \geq 0\},$$

que satisfacen cuatro criterios. Primero, hay dos *relaciones de paralelograma*:

(1) para cada $s \leq t$, tenemos $\Phi_t \circ a_{s \leq t} = b_{s+\varepsilon} \circ \Phi_s$, y

(2) para cada $s \leq t$, tenemos $\Psi_t \circ b_{s \leq t} = a_{s+\varepsilon} \circ \Psi_s$.

Y segundo, hay dos *relaciones de triángulo*:

(1) para cada t , tenemos que $\Psi_{t+\varepsilon} \circ \Phi_t = a_{t \leq t+2\varepsilon}$, y

(2) para cada t , tenemos que $\Phi_{t+\varepsilon} \circ \Psi_t = b_{t \leq t+2\varepsilon}$.

Las condiciones de paralelograma son diagramas que conmutan pero, dado el pequeño cambio $t + \varepsilon$, es que se genera un paralelograma. Con las relaciones de triángulo ocurren comportamientos similares. La razón por la que esto se llama entrelazamiento es porque V_\bullet y W_\bullet quedan, precisamente, entrelazados.

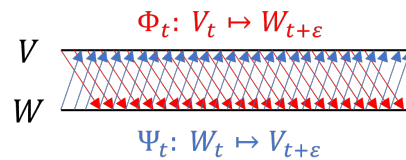


Figura 26: ε -entrelazamiento

Esto es lo que induce la métrica sobre módulos de persistencia. Omitimos la demostración de que es, precisamente, una métrica bien definida.

Distancia entrelazada

Definición 3.37. La **distancia entrelazada** $\rho_{\text{Int}}((V_\bullet, a_\bullet), (W_\bullet, b_\bullet))$ entre los módulos de persistencia (V_\bullet, a_\bullet) y (W_\bullet, b_\bullet) es el ínfimo sobre todas las $\varepsilon \geq 0$ para las que existe un ε -entrelazamiento entre ellos. Si no existe tal entrelazamiento, entonces $\rho_{\text{Int}}(V_\bullet, W_\bullet) = \infty$.

Vamos a imponer una métrica sobre el conjunto de multi-conjuntos tales como los códigos de barras de persistencia de intervalos, lo que será considerablemente más sencillo que con módulos de persistencia. He aquí el objeto que nos permite comparar dos multi-conjuntos.

ε -emparejamiento

Definición 3.38. Para $\varepsilon \geq 0$, un ε -emparejamiento entre dos multi-conjuntos B y B' de intervalos es una biyección $\varrho : B_0 \mapsto B'_0$ entre un par de multi-conjuntos $B_0 \subset B$ y $B'_0 \subset B'$ sujeta a las siguientes restricciones:

- (1) Cada $[s, t] \in (B \setminus B_0) \cup (B' \setminus B'_0)$ tiene longitud $t - s \leq 2\varepsilon$, y
- (2) si $\varrho([s, t]) = [s', t']$ para algún $[s, t] \in B_0$, entonces $|s - s'| \leq \varepsilon$ y $|t - t'| \leq \varepsilon$.

Lo que hace la biyección ϱ es emparejar algunos intervalos en B con algunos intervalos en B' . La restricción (1) indica qué le pasa a los intervalos que no quedan emparejados; ninguno de los intervalos que no quedaron emparejados por ϱ pueden ser muy ε -largos. Esto implica que ninguna de las barras de longitud infinita resultarán no emparejadas si existe un ε -emparejamiento. La restricción (2) trata sobre qué tan cerca están los intervalos que sí quedaron emparejados. En términos estadísticos, podemos decir que $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ y $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ son algo así como intervalos de confianza para s' y t' , respectivamente. Esto explica por qué los intervalos que no se emparejan deben tener una longitud menor o igual a 2ε . Si s y t estuvieran dentro de 2ε uno del otro, uno podría mover s hacia la derecha y mover t hacia la izquierda y probar que todo el intervalo desaparecería.

Solo necesitamos de este concepto para llegar a una distancia entre códigos de barras. La distancia del cuello de botella es la métrica en el espacio de códigos de barras.

Distancia del cuello de botella

Definición 3.39. La **distancia del cuello de botella** $\rho_{\text{Bot}}(B, B')$ entre multi-conjuntos de intervalos B y B' es el ínfimo sobre todos los $\varepsilon \geq 0$ para los que existe un ε -emparejamiento entre ellos.

Aquí los emparejamientos jugaron el rol de los entrelazamientos. Una cosa a tener en cuenta es que cuando los intervalos ocurren con multiplicidad, entonces hay que emparejarlo, ya sea con 3 objetos distintos, o tenerlo ε -entrelazado.

Una de las propiedades más importante, si no es que la más importante, es la estabilidad. Si calculamos la homología persistente de una nube de puntos y modificamos esta nube con una perturbación pequeña, entonces el diagrama de persistencia resultante probablemente se verá muy similar al original.

Teorema de estabilidad

Teorema 3.13. *Para cada par (V_\bullet, a_\bullet) y (W_\bullet, b_\bullet) de módulos de persistencia mansos, tenemos*

$$\rho_{Int}((V_\bullet, a_\bullet), (W_\bullet, b_\bullet)) = \rho_{Bot}(\text{Bar}(V_\bullet, a_\bullet), \text{Bar}(W_\bullet, b_\bullet)).$$

La distancia de entrelazamiento se define en términos de relaciones algebraicas entre familias de espacios vectoriales de un parámetro. Por otro lado, la distancia del cuello de botella se define en términos de hacer coincidir estas barras que se producen cuando se descomponen estas familias de espacios vectoriales, módulos de persistencia, en tipos simples indescomponibles que son solo los módulos de intervalo. La demostración del teorema de estabilidad es muy técnica, utiliza conceptos no revisados en esta tesis y se encuentran en [1].

Es a partir de este teorema que empieza el aprendizaje de máquina utilizando homología persistente. La ventaja clave del teorema de estabilidad es que confiere cierta robustez geométrica a la siguiente canalización de análisis de datos topológicos:

$$\underbrace{(M, \rho)}_{\text{Espacio métrico}} \longrightarrow \underbrace{F_t M}_{\text{Filtración}} \longrightarrow \underbrace{H_k(F_t M)}_{\text{Módulos de persistencia}} \longrightarrow \underbrace{\text{Bar}(F_\varepsilon M)}_{\text{Códigos de barras}}$$

El punto de partida es un conjunto de datos, el espacio métrico. El primer paso describe el paso de un espacio métrico finito a un complejo simplicial filtrado t -indexado. Ya que tenemos un complejo simplicial podemos aplicar homología con módulos de persistencia de dimensión k a escala t . A partir de ahí, calculamos códigos de barras de homología persistentes. Dado que los códigos de barras son objetos combinatorios, se pueden vectorizar fácilmente y alimentar como entrada a las herramientas de inferencia estadística.

Esto es, si perturbamos el conjunto de datos original, podemos cuantificar el cambio en cada paso. Los códigos de barras solo cambiarían sus puntos finales por una cantidad considerablemente pequeña. No obstante, hay que tener en cuenta que la estabilidad sobre los diagramas de persistencia solo será respecto a perturbaciones de pequeña escala; cuando ε es muy pequeña. El teorema de estabilidad entra en escena debido a la métrica de Hausdorff.

En [4] se estudia completamente esta propiedad de estabilidad en diagramas de persistencia. Ahí se usa la expresión

$$\rho_{Bot}(\text{dgm}_1, \text{dgm}_2) = \inf_{\gamma: \text{dgm}_1 \rightarrow \text{dgm}_2} \left\{ \sup_{\vec{x} \in \text{dgm}_1} \|\vec{x} - \gamma(\vec{x})\|_\infty \right\},$$

donde γ es una biyección. Recordamos que la distancia infinito de los puntos en \mathbb{R}^2 $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2)$ se define como

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Con esta expresión es fácil ver que los puntos que están cerca de la diagonal del diagrama de persistencia pueden ser emparejados con puntos en la diagonal y considerados en el análisis como ruido.

De la distancia del cuello de botella tenemos una generalización llamada la **distancia de Wasserstein**, dada por

$$\rho_p(\text{dgm}_1, \text{dgm}_2) := \left(\inf_{\gamma: \text{dgm}_1 \rightarrow \text{dgm}_2} \left\{ \sum_{\vec{x} \in \text{dgm}_1} \|\vec{x} - \gamma(\vec{x})\|_\infty^p \right\} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En contraste con la distancia del cuello de botella, donde tenemos un supremo, aquí solo sumamos todas las distancias de los puntos proyectados en uno de los diagramas con un parámetro de ponderación adecuado.

Estas dos distancias inducen al espacio del diagrama de persistencia un espacio métrico. La distancia del cuello de botella es más receptiva a los ruidos porque solo usa una única distancia para calcular la distancia entre diagramas de persistencia. Por otro lado, la distancia de Wasserstein integra más información de ambos diagramas de persistencia.

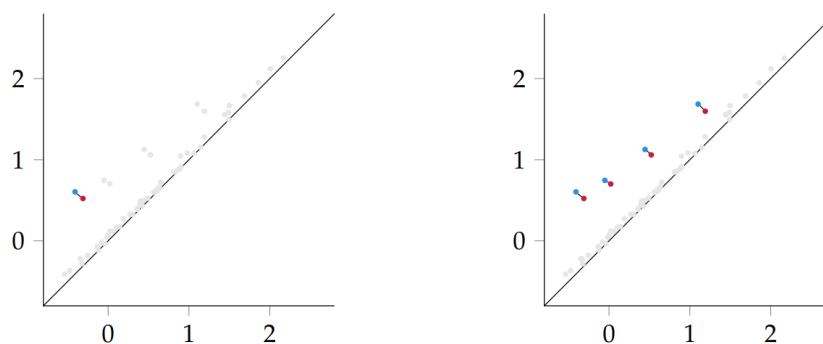


Figura 27: Distancia del cuello de botella | Distancia de Wasserstein

En la distancia del cuello de botella solo nos fijamos en el supremo entre dos puntos en una biyección, mientras que en la distancia de Wasserstein buscamos la suma de todas estas características en una biyección.

Para hacer estos comentarios formales mencionamos los siguientes conceptos y resultados. Así como tenemos módulos de persistencia mansos, la misma propiedad la vamos a tener para funciones.

Funciones mansas

Definición 3.40. Una función $f : M \mapsto \mathbb{R}$ es *mansa* si tiene un número finito de valores críticos homológicos y sus grupos de homología son de dimensión finita.

Casi todas las funciones que se encuentran en el análisis de datos o en la ciencia de datos son mansas, porque se trabajan con datos finitos y entonces las funciones también deben ser finitas. El siguiente es un lema que también trata de la estabilidad y se conoce como el lema de la biyección fácil.

Lema 3.1. Sea M un espacio triangulable con funciones mansas continuas

$$f, g : M \mapsto \mathbb{R}.$$

Entonces los correspondientes diagramas de persistencia $\text{dgm}(f)$ y $\text{dgm}(g)$ satisfacen $\rho_\infty(\text{dgm}(f), \text{dgm}(g)) \leq \|f - g\|_\infty$.

Esto significa que la distancia del cuello de botella entre diagramas de persistencia está superiormente acotada por la distancia de Hausdorff entre dos funciones. En el lado derecho tenemos una distancia en un espacio de funciones, mientras que en el lado izquierdo una distancia topológica. Así sabemos que si dos funciones están cercanas, los diagramas de persistencia correspondientes no están infinitamente separados. Este lema, enunciado y demostrado en [4], sentó las bases para los usos prácticos de la homología persistente.

Ahora, para un interludio, necesitamos algo de teoría del kernel. Tal kernel se puede usar para evaluar la diferencia entre dos objetos.

Kernel

Definición 3.41. Dado un conjunto X , una función $k : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ es un *kernel* si existe un espacio \mathcal{H} con producto interno que también es un espacio métrico y una función $\Phi : X \mapsto \mathcal{H}$, tal que $k(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{H}}$ para toda $x, y \in X$.

El espacio \mathcal{H} puede ser de alta dimensión, lo que simplifica el cálculo. Con las distancias del cuello de botella y la de Wasserstein hay que no son sencillas de calcular porque se debe resolver el problema de optimización del ínfimo y el supremo. Este es el primer kernel entre los diagramas de persistencia; es simple de implementar y expresivo. Viene dado por [12],

$$k(\text{dgm}_1, \text{dgm}_2) := \frac{1}{8\pi\sigma} \sum_{\vec{x} \in \text{dgm}_1, \vec{y} \in \text{dgm}_2} \exp\left(-\frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{8\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{\|\vec{x} - (y_2, y_1)\|^2}{8\sigma}\right)$$

$$\Phi(\vec{z}) := \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{\vec{x} \in \text{dgm}_1} \exp\left(-\frac{\|\vec{z} - \vec{x}\|^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{\|\vec{z} - (x_2, x_1)\|^2}{4\sigma}\right)$$

Aquí, $\sigma > 0$ es un parámetro. En muchas aplicaciones dentro del aprendizaje de máquina, no se está tan interesado en una métrica bien definida entre dos objetos. Más bien, se es conforme con saber que dos objetos son muy similares o son muy diferentes. Es aquí donde entra la formulación del kernel, pues se pueden evaluar mucho más eficientemente y dan pie a técnicas de clasificación.

4. Aplicaciones de topología de datos en la ciencia de datos

Por una parte, la topología algebraica y la geometría simplicial ya ofrecen ciertos resultados y soluciones para el análisis de datos. No obstante, otro reto es el computacional. Así como se platicó en el capítulo 2, el teorema del nervio ya nos asegura que el complejo simplicial que vive en \mathbb{R}^n asociado a una nube de puntos es lo mismo, homotópicamente hablando, que el espacio topológico, o unión de bolas que cubre cada punto, al que se aproxima la nube de puntos. Computacionalmente hablando, no es fácil calcular esto para hacer inferencias. Aún así, actualmente ya existe el algoritmo de MAPPER, capaz de asociarle un nervio a una nube de puntos. Este algoritmo fue introducido por Gurjeet Singh, Facundo Mémoli y Gunnar Carlsson en 2007 en el artículo [14]. Un ejemplo clásico y fácil de entender es el del toro, así que presentamos el código en python de MAPPER para un toro. Lo que necesitamos es una función filtro, aquí `fit_transform` que, por defecto, suma las coordenadas como proyección. La métrica predeterminada es la euclidiana. Se crea la cubierta con `Cover`, donde el número de intervalos para cubrir es 20 y se traslapan en un porcentaje de 20 %. También se usa el algoritmo DBSCAN para agrupar datos.

```

1 import tadasets
2 import kmapper as km
3 import sklearn
4 from IPython.display import IFrame
5
6 torus = tadasets.torus(n = 20000, c = 20, a = 0.2, noise = 0.3)
7 mapper = km.KeplerMapper(verbose = 1)
8 lens = mapper.fit_transform(torus)
9
10 graph = mapper.map(lens, torus,
11                   clusterer = sklearn.cluster.DBSCAN(eps=2, min_samples=3),
12                   cover = km.Cover(n_cubes = 20, perc_overlap = 0.2))
13
14 mapper.visualize(graph, path_html = "output_torus.html")
15 IFrame(src = "output_torus.html", width = 1000, height = 700)

```

Listing 1: Algoritmo MAPPER para un toro

En este ejemplo se hace uso de las librerías `tadasets`, que permite obtener conjuntos de datos con estructuras topológicas, `kmapper`, que contiene el algoritmo de MAPPER [15], y `sklearn`, que contiene algoritmos de regresión y agrupamiento.

Ahora bien, ya en el terreno de la persistencia, también existen librerías en python que permiten graficar descriptores como los diagramas de persistencia. Siguiendo el mismo ejemplo del toro, el código para obtener un diagrama de persistencia es el siguiente.

```

1 import numpy as np
2 from ripser import ripser
3 from persim import plot_diagrams
4
5 diagrams = ripser(torus)['dgms']

```

```
6 plot_diagrams(diagrams, show = True)
```

Listing 2: Diagrama de persistencia para un toro

El diagrama de persistencia resultante de este código es el que se encuentra en la figura 25. En ese diagrama tenemos los puntos azules de H_0 y los naranjas de H_1 . Los azules indican las componentes de toda la nube de puntos. Hay muchos de estos puntos cerca de la recta $y = x$, significa que así como nacieron las componentes, enseguida se murieron. Pero existe un punto azul que nace casi al inicio y persiste, porque tenemos una figura, el toro. Los puntos naranjas de H_1 son los ciclos de dimensión 1. En este caso, el toro se puede ver como solo un ciclo circular, por lo que hace sentido que apenas un ciclo nazca, muera. Al final, solo se tiene el ciclo que recorre todo el toro. Aunque, como lo indica el diagrama, para un ε -espesamiento suficientemente grande, este ciclo también desaparece y todo se conecta entre sí.

Bajo este algoritmo se etiquetan los nodos del complejo simplicial por tamaño y color:

- el tamaño de un nodo indica el número de puntos en el conjunto representado por el nodo;
- el color de un nodo indica el valor en un punto representativo.

Podemos aplicar este mismo algoritmo a un conjunto de datos del mundo real. En este caso, se ha obtenido un conjunto de datos de [6] sobre enfermedades cardiovasculares. Este conjunto de datos se creó mediante la combinación de diferentes conjuntos de datos que ya estaban disponibles de forma independiente pero que no se habían combinado antes. Tenemos un total de 918 datos y 12 variables, sin embargo, 5 son categóricas, por lo que nos deshacemos de ellas. Las variables que sí consideramos son:

1. Edad: edad del paciente [años]
2. PA en reposo: presión arterial en reposo [mm Hg]
3. Colesterol: colesterol sérico [mm/dl]
4. BS en ayunas: azúcar en sangre en ayunas [1: si BS en ayunas >120 mg/dl, 0: en caso contrario]
5. MaxHR: frecuencia cardíaca máxima alcanzada [Valor numérico entre 60 y 202]
6. Oldpeak: oldpeak = ST [Valor numérico medido en depresión]

Además, está la variable de enfermedad del corazón, que será la que se intentará explicar.

```
1 import pandas as pd
2 import requests
3 import numpy as np
4 import kmapper as km
5 import sklearn
6 from sklearn.neighbors import KernelDensity
7 from IPython.display import IFrame
8
9 data = pd.read_csv('Heart.csv')
10 feature_names = [c for c in data.columns if c not in ["Sex", "ChestPainType", "RestingECG", "ExerciseAngina", "ST_Slope", "HeartDisease"]]
```

```

11 X = np.array(data[feature_names].fillna(0))
12 y = np.array(data["HeartDisease"])
13
14 mapper = km.KeplerMapper(verbose = 1)
15 lens = mapper.fit_transform(X, projection = KernelDensity(kernel
    = 'gaussian', bandwidth = 0.7))
16
17 graph = mapper.map(lens, X,
18     clusterer = sklearn.cluster.DBSCAN(eps=500, min_samples=3),
19     cover = km.Cover(n_cubes = 10, perc_overlap = 0.5))
20
21 mapper.visualize(graph, path_html = "output_heartdisease.html",
    custom_tooltips = y)
22 IFrame(src="output_heartdisease.html", width=1250, height=1250)

```

Listing 3: Conjunto de datos real; enfermedad del corazón

El algoritmo MAPPER se alimenta de una filtración definida por una distancia. En este caso, utilicé `projection = KernelDensity(kernel = 'gaussian', bandwidth = 0.7)`. Este filtro es muy utilizado para modelar donde se están acumulando los datos. Utiliza varias funciones de densidad, por defecto está la gaussiana. Además, uso un ancho de banda de 0.7 y, cabe resaltar que, uno de los parámetros es la métrica. Por defecto se usa la métrica euclidiana. Así, se obtiene el siguiente complejo simplicial.

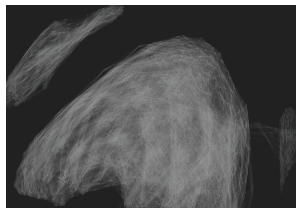


Figura 28: Complejo simplicial para enfermedad del corazón

A grandes rasgos podemos darnos cuenta que existen tres componentes separadas. Como son 6 columnas, son datos que viven en \mathbb{R}^6 . Lo que hace el algoritmo MAPPER es proyectarlos en una dimensión visible para nosotros. Cada nodo es un representante para una clasificación, 0 o 1. No obstante, resulta bastante difícil obtener una inferencia significativa de este complejo. Es probable que se tenga que cambiar la filtración pues, más allá de en dónde se acumulan las observaciones, una enfermedad no se espera que sea común. Por tanto, ahora utilicemos el algoritmo de bosques aislados, que busca los valores atípicos en datos con grandes dimensiones. Una enfermedad del corazón es, precisamente, algo atípico. El `IsolationForest` aísla las observaciones seleccionando aleatoriamente una característica y luego seleccionando aleatoriamente un valor dividido entre los valores máximo y mínimo de la característica seleccionada. Esta información se puede encontrar en [11]. Además, se puede usar un segundo filtro como la norma `l2norm` que es la usual. Combinamos ambos filtros para generar un filtro en dos dimensiones. El código siguiente continúa al Listing 3 a partir de la línea 15.

```

1 model = ensemble.IsolationForest(random_state = 1729)
2 model.fit(X)
3
4 lens1 = model.decision_function(X).reshape((X.shape[0], 1))
5 lens2 = mapper.fit_transform(X, projection = "l2norm")
6 lens = np.c_[lens1, lens2]
7
8 graph = mapper.map(lens, X, cover = km.Cover(n_cubes = 15,
9         perc_overlap = 0.7),
10         clusterer = sklearn.cluster.KMeans(n_clusters
11         = 2, random_state = 1618033))
12 mapper.visualize(graph, path_html = "output_heartdisease.html",
13         custom_tooltips = y)
14 IFrame(src="output_heartdisease.html", width=1000, height=700)

```

Listing 4: Enfermedad del corazón con dos filtraciones

Ahora sí, obtenemos un complejo simplicial con el que se pueden hacer inferencias. Lo primero que se puede observar es que hay dos grandes componentes.



Figura 29: Complejo de enfermedad del corazón con dos filtraciones

Los nodos o vértices de color azul son los que tienen valores iguales a uno en su mayoría, mientras que los nodos que se ven verdes o amarillos son los que tienen valores en su mayoría 0. La componente que está a la izquierda está llena de colores azules, indicando que son las personas que sí tienen una enfermedad en el corazón. Ahí, aunque sí hay algunos valores 0, probablemente se trate de las personas que son propensas a tener una enfermedad en el corazón. La componente de la derecha tiene un poco más de nodos verdes que de azules, sobre todo el centro de la componente. De aquí podemos concluir que en esa componente se encuentran las personas que no tienen una enfermedad del corazón y también que los nodos que se encuentran en los extremos, casi separándose, contienen algunas personas con enfermedad en el corazón.

Para finalizar este análisis, visualicemos su respectivo diagrama de persistencia con el siguiente código.

```
1 import numpy as np
2 from ripser import ripser
3 from persim import plot_diagrams
4
5 diagrams = ripser(X) ['dgms']
6 plot_diagrams(diagrams, show = True)
```

Listing 5: Diagrama de persistencia para enfermedad del corazón

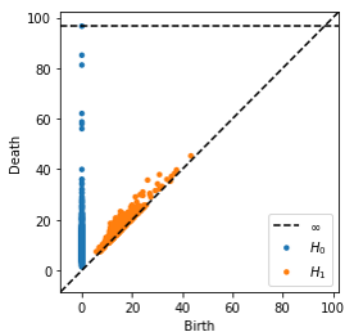


Figura 30: Diagrama de persistencia para enfermedad del corazón

Se puede ver entonces que muchas componentes nacen apenas existe un radio, no obstante, mueren en su mayoría cuando empieza a crecer este radio. Para un radio mayor o igual a 100, nos quedamos con una componente y no vuelve a cambiar nuestro complejo simplicial. Por otro lado, todos los ciclos están casi pegados a la diagonal, lo que significa que, realmente, no hay ciclos en este conjunto de datos pues estos no persisten. Me parece que este comportamiento debe ser particular de los conjuntos de datos que sobre variables binarias. Esto porque lo que se quiere explicar es si se cumple algo o no, una enfermedad en el corazón en este caso, y lo que persiste serían las dos componentes que agrupan a aquellas observaciones que sí lo cumplen y aquellas observaciones que no lo cumplen. Lo que importa es cuando tenemos un radio a partir de 80, que es cuando la filtración se parece al complejo simplicial de la figura 29. Vale la pena recordar que estamos analizando la forma de un conjunto de datos que vive en \mathbb{R}^6 con un diagrama

en \mathbb{R}^2 . Además, que el teorema de estabilidad nos asegura que, hasta este punto, una perturbación en el conjunto de datos original no cambiaría el análisis realizado.

También se puede encontrar un análisis en [7] sobre los métodos del aprendizaje de máquina topológico, algunos de los cuales los repasamos en esta tesis. Ya vimos que los diagramas de persistencia son descriptores de características topológicas muy naturales, tienen sus desventajas con perturbaciones grandes pero también propiedades deseables. Sin embargo, no es muy fácil usarlos de entrada para modelos de aprendizaje de máquina. Para eso hace falta vectorizar dichos diagramas. Nuestro primer paso a este acercamiento fue definir una métrica en dichos diagramas, y así poder manejar las representaciones de los datos con características vectoriales.

Referencias

- [1] Ulrich Bauer y Michael Lesnick. “Induced Matchings and the Algebraic Stability of Persistence Barcodes”. En: (2015).
- [2] Frédéric Chazal y André Lieutier. “Smooth manifold reconstruction from noisy and non-uniform approximation with guarantees”. En: *Computational Geometry* 40 (2008), págs. 156-170.
- [3] Marc Niethammer Christoph D. Hofer Roland Kwitt. “Learning Representations of Persistence Barcodes”. En: *Journal of Machine Learning Research* 20 (2019), págs. 1-45. DOI: <http://jmlr.org/papers/v20/18-358.html>.
- [4] Herbert Edelsbrunner David Cohen-Steiner y John Harer. “Stability of Persistence Diagrams”. En: *Discrete Computational Geometry* 37 (2007), págs. 103-120. DOI: 10.1007/s00454-006-1276-5.
- [5] Herbert Edelsbrunner y John Harer. *Computational Topology, An Introduction*. AMS, 2010.
- [6] fedesoriano. *Heart Failure Prediction Dataset*. Last accessed 16 November 2021. 2021. URL: <https://www.kaggle.com/fedesoriano/heart-failure-prediction>.
- [7] Michael Moor Felix Hensel y Bastian Rieck. “A Survey of Topological Machine Learning Methods”. En: *Frontiers in Artificial Intelligence* 4.681108 (2021). DOI: 10.3389/frai.2021.681108.
- [8] Robert Ghrist. “BARCODES: THE PERSISTENT TOPOLOGY OF DATA”. En: *AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* 45.1 (2007), págs. 61-75. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-07-01191-3>.
- [9] David Letscher Herbert Edelsbrunner y Afra Zomorodian. “Topological Persistence and Simplification”. En: *Discrete and Computational Geometry* 28 (2002), págs. 511-533. DOI: 10.1007/s00454-002-2885-2.
- [10] Vedit Nanda. *Computational Algebraic Topology*. 2021.
- [11] F. Pedregosa y col. “Scikit-learn: Machine Learning in Python”. En: *Journal of Machine Learning Research* 12 (2011), págs. 2825-2830.
- [12] Jan Reininghaus y col. “A Stable Multi-Scale Kernel for Topological Machine Learning”. En: (2015), págs. 4741-4748.
- [13] Fermín Reveles y col. *Persistencia, Probabilidad e Inferencia Estadística para Análisis Topológico de Datos*. CIMAT, 2016.

- [14] Gurjeet Singh, Facundo Mémoli y Gunnar Carlsson. “Topological Methods for the Analysis of High Dimensional Data Sets and 3D Object Recognition”. En: *Eurographics Symposium on Point-Based Graphics 2* (2007), págs. 91-100.
- [15] Hendrik Jacob van Veen y col. “Kepler Mapper: A flexible Python implementation of the Mapper algorithm.” En: *Journal of Open Source Software* 4.42 (2019), pág. 1315. DOI: 10.21105/joss.01315. URL: <https://doi.org/10.21105/joss.01315>.