CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

El objetivo del capítulo 3 es conocer la metodología, por lo cual nos apoyaremos en el libro de “Simulation modeling and Analysis” (Law, 2000), para estudiar algunas pruebas de bondad de ajuste. También nos apoyaremos en el libro “Fundamentos de Finanzas Corporativas” (Ross, 1997), para conocer lo que es el riesgo sistemático y el riesgo no sistemático ya que para calcular el rendimiento esperado es necesario tomar en cuenta el riesgo con el que se cuenta.

3.1 Pruebas de Hipótesis

Según el libro “Estadística Matemática con Aplicaciones” (Mendehall, 1986), las pruebas de hipótesis se realizan en todas las situaciones en las cuales se puede contrastar la teoría en comparación con la observación. Por ejemplo, un candidato a la presidencia puede afirmar que la mayoría de las personas que votan están de su lado. Se somete esta hipótesis a una verificación estadística comparándola con los datos muéstrales observados, es decir, que para probar una hipótesis implica tomar una decisión al realizar una comparación entre la muestra observada con respecto a la teoría.

Para llevar a cabo una prueba de hipótesis es importante tomar en cuenta los siguientes elementos:

1. Hipótesis nula H_0. Es aquella que plantea lo contrario de lo que se quiere probar.
2. Hipótesis alternativa H_a. Es aquella que plantea lo que se quiere probar

3. Estadístico de prueba. Es una función de las mediciones muéstrales, es decir, es el valor calculado mediante valores muéstrales, este valor sirve para tomar en una decisión estadística, dicha decisión consiste en optar si se rechaza o no la hipótesis nula.
4. Nivel de significación _. Se define como la probabilidad de rechazar de manera errónea la hipótesis nula.
5. Valor p o p-value. Es el nivel de significación alcanzado de una prueba. Esta cantidad representa el valor mínimo de _.

Donde se rechaza la hipótesis nula si *valor p* ≤ _.

Hay que tomar en cuenta que para calcular el *valor p* para valores pequeños de un estadístico de prueba *E,* es el siguiente:

$$valor\ p = P(E \leq e, \text{ cuando la hipótesis nula es verdadera})$$

Ahora bien, para valores grandes de *E*, el *valor p* asociado al valor observado es:

$$valor\ p = P(E \geq e, \text{ cuando la hipótesis nula es verdadera})$$

Donde *e* es el valor asociado de *E.*

Para comprender más a fondo las pruebas de hipótesis se planteará un problema a resolver.

Supongamos que en una encuesta política se seleccionan 20 votantes de los cuales el Sr. Juan afirma que más del 50% están a su favor, pero se sospecha que dicha información es falsa, y además supongamos que el estadístico de prueba "*Y*" es el número de votantes a favor del Sr. Juan. También supongamos un alfa del 5% y además que $Y = 5$ y tiene una distribución binomial.

En este caso la hipótesis alternativa es $p < 0.5$ y la hipótesis nula es $p = 0.5$

De acuerdo con la definición del *valor p*, éste se calcula de la siguiente manera:

$$valor\ p = P(Y \leq 5)$$

Donde Y tiene una distribución binomial con n = 20 y $p = 0.5$, utilizando la tabla de la binomial obtenemos que el *valor p* es 0.021. Como podemos observa el *valor p* es menor que alfa, por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y concluimos que no se cuenta con suficiente información para rechazar la sospecha de que la afirmación del Sr. Juan es falsa.

3.2 Pruebas de Bondad de Ajuste

Las pruebas de bondad de ajuste son pruebas de hipótesis estadísticas que sirven para comprobar si una serie de datos se ajusta a una distribución de probabilidad conocida.

Para llevar a cabo estas pruebas es necesario tomar en cuenta los siguientes elementos:

1. Hipótesis nula H_0. Es aquella que plantea lo que se quiere demostrar
2. Hipótesis alternativa H_a. Es lo contrario a la hipótesis nula.
3. Estadístico de prueba.
4. Nivel de significación _.
5. Valor p o p-value.

3.2.1 Prueba Kolmogorov-Smirnov

Esta prueba también se conoce como prueba K-S, donde su objetivo es verificar la distribución de una serie de datos que provienen de una muestra aleatoria, es decir, que son independientes y de una misma población. Su mecanismo consiste en comparar la función de distribución teórica[1] con la función de distribución empírica[2], y luego se

[1] La distribución teórica es aquella que se quiere demostrar.

calcula el estadístico de prueba que es un valor de distancia "D", dicho valor se define como la distancia máxima en valor absoluto entre la función de distribución observada y la función de distribución teórica.

En otras palabras, el estadístico de prueba para la prueba K-S es el siguiente:

$$D = \max \left| F(Y_i) - S_N(x) \right|, \quad \text{para } i = 1,\dots,N \qquad (3.1)$$

Donde:

F(x) es la función de distribución teórica.

Y_i es el i-ésimo estadístico de orden[3]

N es el número de datos a analizar y

$S_N(x) = \frac{i}{N}$ es la función de distribución empírica

Cabe mencionar que, para que esta prueba funcione, es necesario que se trabaje con funciones continuas porque con funciones discretas no sirve., ya que esta prueba está diseñada para datos no numerables y las funciones discretas solo toman en cuenta datos numerables.

Después de obtener el estadístico de prueba es necesario calcular el estadístico ajustado[4], el cual se compara con el valor crítico de la tabla que pertenece a la prueba K-S. Es importante mencionar que dicha tabla se encuentra dividida dependiendo de la distribución que se desee probar.

Finalmente, la regla de rechazo para esta prueba queda dada de la siguiente manera:

Se rechaza H_0 si:

---

[2] La distribución empírica es aquella que proviene de los datos.
[3] Para obtener el i-ésimo estadístico de orden, primero se acomodan los datos de menor a mayor y luego se toma el i-ésimo dato.
[4] El estadístico ajustado es el valor resultante específico de prueba para una distribución de probabilidad.

- Estadístico ajustado > $C_{1-\alpha}$, o
- Valor p ≤ α

Donde:

$C_{1-\alpha}$ es el valor crítico asociado con $1-\alpha$,

Valor p = ($D \geq d_0$, cuando la hipótesis nula es verdadera). En donde d_0 es el valor asociado al estadístico de prueba *D*.

En la tabla 3.1 se muestra parte de los estadísticos ajustados con sus respectivos valores críticos, en la que se encuentran los casos para una distribución normal y para una distribución exponencial.

Tabla 3.1 Valores Críticos de la Prueba K-S

$1-\alpha$		0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
Distribución	Estadístico ajustado	$C_{1-\alpha}$				
$N(\overline{X}(n), S^2(n))$	$(\sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}})D$	0.775	0.819	0.895	0.951	1.035
$Expo(\overline{X}(n))$	$(D - \frac{0.2}{n})(\sqrt{n} + 0.26 + \frac{0.5}{\sqrt{n}})$	0.926	0.99	1.094	1.19	1.308

Fuente: Elaboración propia

3.2.2 Prueba Anderson-Darling

Para realizar esta prueba es necesario tener en cuenta los elementos anteriormente mencionados en la prueba K-S.

El estadístico de prueba para la prueba Anderson-Darling es:

$$A_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)[1-F(x)]} f(x)dx \tag{3.2}$$

$$A_n^2 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{(2i-1)}{n}\left[\ln F(Y_i) + \ln(1-F(Y_{n+1-i}))\right] - n \tag{3.3}$$

Donde:

n es el número de datos

$F(x)$ es la función de distribución de probabilidad teórica

$F_n(x)$ es la función de distribución empírica.

Para definir la regla de rechazo para esta prueba es necesario, también, obtener el estadístico ajustado para luego compararlo con los valores críticos de la tabla de Anderson-Darling. En la figura 3.1 se pueden observar los valores críticos para distribuciones distintas, con parámetros conocidos.

		$1-\alpha$			
Case	**Adjusted test statistic**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**
All parameters known	A_n^2 for $n \geq 5$	1.933	2.492	3.070	3.857
$N(\overline{X}(n), S^2(n))$	$\left(1 + \frac{4}{n} - \frac{25}{n^2}\right)A_n^2$	0.632	0.751	0.870	1.029
$\text{Expo}(\overline{X}(n))$	$\left(1 + \frac{0.6}{n}\right)A_n^2$	1.070	1.326	1.587	1.943
$\text{Weibull}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	$\left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right)A_n^2$	0.637	0.757	0.877	1.038
$\text{Log-logistic}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$	$\left(1 + \frac{0.25}{\sqrt{n}}\right)A_n^2$	0.563	0.660	0.769	0.906

Figura 3.1 Tabla de Valores Críticos para la Prueba Anderson-Darling
Fuente: Simulation Modeling and Analysis

Una vez obtenido el estadístico ajustado, la regla de rechazo se realiza análogamente a utilizada en la prueba K-S, explicada anteriormente. En este caso el valor es el siguiente:

Valor p = ($A_n^2 \geq a_0$, cuando la hipótesis nula es verdadera). En donde a_0 es el valor asociado al estadístico de prueba A_n^2.

3.3 Riesgo Sistemático y Riesgo no Sistemático

Se le llama riesgo sistemático aquél que influye en mayor o menor grado en un gran número de activos y afectan a todo el mercado. Las tasas de interés o la tasa de inflación son dos claros ejemplos de riesgo sistemático, ya que un aumento inesperado en cualquiera de estos dos factores afecta a casi todas las empresas.

Por otra parte, se le llama riesgo no sistemático aquél que afecta a un solo activo o a un grupo pequeño de activos por lo que también se le conoce como riesgo único. Un ejemplo claro de este tipo de riesgo es el anuncio de una huelga de cualquier empresa, ya que esto sólo afectaría a esa empresa en particular.

3.3.1 Principio de Diversificación de Relación con el Riesgo no Sistemático y Sistemático

El principio de diversificación nos habla de que el hecho de que se distribuya una inversión entre varios activos eliminará parte del riesgo. Por una parte, relacionando este principio con el riesgo no sistemático se llega a la conclusión de que éste puede ser eliminado mediante la diversificación, lo cual se debe a que, como ya se comentó anteriormente, el riesgo no sistemático afecta a una empresa en particular; por lo que la variabilidad asociada con los activos individuales se elimina mediante la diversificación. Por lo anteriormente mencionado, una cartera relativamente grande conformada por activos casi no presenta riesgo no sistemático.

Por otra parte, relacionando este principio con el riesgo sistemático, sucede todo lo contrario que con el riesgo no sistemático. Es decir, en este caso como el riesgo sistemático afecta a casi todas las empresas entonces no se puede eliminar mediante la diversificación.

Ya presentados estos dos términos, el riesgo total se puede expresar de la siguiente manera:

$$RT = S + NS \tag{3.4}$$

Donde RT es el riesgo total observado en el año y, S y NS representan el riesgo sistemático y el no sistemático respectivamente.

3.3.2 Riesgo Sistemático y Beta

Sabemos que en el mercado de capital (actividad financiera que promueve el crédito de mediano y largo plazo) para que exista una ganancia debe existir un riesgo, por lo que es necesario saber exactamente lo que queremos decir con riesgo. El principio de riesgo sistemático nos dice que el rendimiento esperado de un activo con riesgo depende únicamente del riesgo sistemático relacionado con dicho activo. Cabe mencionar que independientemente del riesgo total que tenga un activo, la parte relevante para determinar el rendimiento esperado es el riesgo sistemático de dicho activo.

Ya que sabemos que el riesgo sistemático es el determinante del rendimiento esperado de un activo, hay que saber como medir el nivel de dicho riesgo para diferentes inversiones. Dicha medida recibe el nombre de coeficiente beta o beta (β), la cual indica la cantidad de riesgo sistemático que tiene un determinado activo en relación con un activo promedio. Por ejemplo, si un activo tiene una $\beta = 0.5$ quiere decir que tiene la mitad de riesgo sistemático que el otro activo con el que se está relacionando. En otras palabras, si estamos comparando un activo "x" contra un activo "y", y se tiene que β es menor que 1, quiere decir que el activo "x" tiene menor riesgo sistemático que el activo "y". Si β es mayor que 1, entonces el activo "x" tiene mayor riesgo que el otro y; si es igual a 1, entonces tienen el mismo riesgo sistemático. Cabe mencionar que el coeficiente beta se puede obtener mediante una regresión lineal simple, donde beta es la pendiente de la línea recta ajustada.

3.4 Regresión Lineal Simple

Existen modelos matemáticos que pueden ser determinísticos o probabilísticos que sirven para representar modelos con variables independientes que están relacionadas con variables dependientes.

La diferencia que existe entre estos dos modelos es que los determinísticos no permiten ningún tipo de error en la predicción, en cambio los probabilísticos predicen un valor Y dado un valor de x, es decir, llevan a cabo un proceso inferencial en el que se conocen las propiedades de error.

El principal objetivo dentro de una regresión lineal simple es el de encontrar una recta que defina los cambios en la variable dependiente con respecto a los cambios en la variable independiente. Dicha recta se define de la siguiente manera:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad (3.5)$$

Donde:

Y_i es la variable dependiente correspondiente a la observación i

x_i es la variable independiente correspondiente a la observación i

_ es la ordenada

_ indica el cambio en Y_i correspondiente en x_i.

ε_i (error) es la i-ésima inexactitud de la función de densidad de probabilidad de x, f(x), con respecto a Y. Además, ε_i es una variable aleatoria que tiene una distribución de probabilidad específica con media igual a cero.

Calculando el valor esperado de Y en la ecuación 3.5, se obtiene:

$$E(Y_i) = \alpha + \beta x_i \qquad (3.6)$$

Cabe mencionar que hay que considerar los siguientes supuestos:

a) $E(\varepsilon_i) = 0,$ no se espera tener error

b) $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2),$ el error se distribuye normal con media 0 y varianzas iguales, es decir, cada uno de los errores presenta la misma varianza.

c) $\begin{matrix} Cov(x, \varepsilon_i) = E(x\varepsilon) = 0 \\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \end{matrix},$ se supone independencia y los errores no están correlacionados.

Para estimar los parámetros de este modelo lineal se utiliza el método de los mínimos cuadrados, ya que su procedimiento consiste en estimar parámetros de cualquier modelo lineal.

El procedimiento de los mínimos cuadrados pretende que las desviaciones sean pequeñas. Una manera para lograr esto es minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales, o llamados de otra forma, suma de los cuadrados de los errores (SEC), de la recta ajustada

Ya que $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son estimadores _ y _ de respectivamente, entonces $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ es un estimador de *E(Y)*.

Si $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ es el valor que se predice del i-ésimo valor de y, cuando $x = x_i$, entonces la desviación del valor observado de y a partir de la recta $\hat{y}$ es: $e_i = y_i - \hat{y}_i$, donde e es el error. Por lo que SEC queda de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i\right)\right]^2 \qquad (3.7)$$

Si SEC tiene un mínimo, entonces éste ocurrirá tanto para $\hat{\alpha}$ como para $\hat{\beta}$. Por lo tanto, se obtienen las derivadas parciales de SEC con respecto a $\hat{\alpha}$ y con respecto a $\hat{\beta}$ y se igualan a cero.

$$\frac{\partial SEC}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial SEC}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

Dichas derivadas se denominan ecuaciones de los mínimos cuadrados para estimar parámetros de una recta.

Ahora bien, se tienen las siguientes soluciones:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{3.8}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \tag{3.9}$$

Donde:

x_i son variables independientes, para i = 1, 2, … , n

y_i son variables dependientes, para i = 1, 2, … , n

$\bar{x}$ es la media muestral de las variables independientes, y

$\bar{y}$ es la media muestral de las variables dependientes

De esta manera se obtiene $\hat{\beta}$, que es la estimación del cambio en *Y* correspondiente al cambio en *x*, y $\hat{\alpha}$ que es la estimación de la ordenada y está es el valor que toma la variable dependiente cuando la variable independiente es igual a cero.

.

Ya obtenida la ecuación del modelo existe una manera para determinar la calidad de la regresión, para lo que se utiliza el nombre de coeficiente de determinación. Ya que sabemos que el objetivo de la regresión es explicar los cambios en la variable independiente, es importante saber que existirán cambios, en el modelo, que se puedan explicar y otros que no, a esto se le llama coeficiente de determinación (R^2), donde

$$R^2 = \frac{\text{Variación explicada}}{\text{Variación total}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - \bar{y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2} \tag{3.10}$$

Donde R^2 mide qué tanto influye la variable independiente en la variable dependiente, es decir, entre más cercana sea R^2 a 1 mejor será la regresión, por lo que cuando R^2 sea igual a 1 se podrá decir que es un modelo perfecto, ya que se estaría diciendo que la variable independiente influye 100% en la variable dependiente.

3.5 Beta y Prima por Riesgo de Mercado

La prima por riesgo de mercado se define como la diferencia entre el rendimiento esperado de la cartera y la tasa libre de riesgo, como podría ser la tasa de los CETES. Relacionando el coeficiente beta con la prima por riesgo de mercado y tomando en cuenta que el rendimiento esperado de un activo del mercado es la suma de una tasa libre de riesgo y la prima por riesgo de mercado, podemos decir que:

$$E(R_a) = R_L + \beta_a (E(R_m) - R_L) \tag{3.11}$$

Donde $E(R_a)$ representa al rendimiento esperado del activo, R_L representa la tasa libre de riesgo, β_a representa la cantidad de riesgo, $E(R_m)$ representa el rendimiento esperado del mercado y $(E(R_m) - R_L)$ la prima por riesgo de mercado.

Es importante mencionar que si $\beta_a < 1$, entonces el rendimiento esperado del activo tiene menor riesgo que el rendimiento esperado del mercado. Por ejemplo si $\beta_a = 0.5$, entonces el premio del activo se incrementará o reducirá en la mitad de la proporción del aumento o reducción del premio del mercado, es decir, que si la prima del mercado presenta un incremento de 2 puntos porcentuales, entonces la prima del activo presentará un incremento de 1 punto porcentual; por el caso contrario, si se espera que el premio del mercado disminuya un 2%, entonces se esperaría que el premio del activo disminuya en 1%.

Ahora bien, si $\beta_a > 1$, entonces el activo tiene más riesgo que el activo promedio del mercado. Por ejemplo, si $\beta_a = 2$ quiere decir que si el premio del mercado se incrementa un 2%, entonces el premio del activo se incrementará un 4%, pero si el premio del mercado se reduce un 2%, entonces el premio del activo se reducirá un 4%.

Por último, si $\beta_a = 1$ quiere decir que el premio del activo aumentará o disminuirá en la misma cuantía que el premio del mercado, es decir, si se espera tener un incremento del 2% en el premio de mercado, entonces el premio del activo aumentará un 2%.