

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y REVISIÓN LITERARIA

En el presente capítulo se plantea el marco teórico en el que se desarrolla el problema. La primera sección habla de las bases de la administración de carteras de inversión, planteando el Modelo de Markowitz. Las secciones 2.2 y 2.3 explican respectivamente los procedimientos de dos técnicas heurísticas, los Algoritmos Evolutivos y el Algoritmo de Templado Simulado. Se concluye este capítulo mencionando algunas técnicas recientes utilizadas para resolver los problemas de opciones de inversión en la sección 2.4.

2.1 Administración de Carteras de Inversión

Como ya se dijo, los administradores responsables de la inversión en las empresas buscan combinar las opciones de inversión de tal manera que la cartera resultante proporcione el rendimiento más alto a un nivel de riesgo dado o el menor riesgo para un nivel de rendimiento dado. Así, los administradores deben estar monitoreando las características del riesgo y el rendimiento de su cartera utilizando técnicas que faciliten encontrar la combinación óptima de activos en una cartera. El ambiente de trabajo más analítico y básico para tal análisis de la cartera es el Modelo de Markowitz, el cual es explicado detalladamente a continuación.

2.1.1 Modelo de Markowitz

Harry Markowitz inició el campo llamado Teoría Moderna de la Cartera, proponiendo un modelo de programación cuadrática para seleccionar un portafolio diversificado de activos (Markowitz, 1959). El resultante modelo de Media-Varianza es uno de los programas no lineales más estudiados hasta el momento (ver Mulvey, 2001).

En términos generales, el Modelo de Markowitz intenta cuantificar la interrelación entre el comportamiento de los componentes de la cartera para determinar en una situación específica una cartera lo suficientemente diversificada como para que el riesgo total sea menor que la suma ponderada de sus componentes.

El supuesto fundamental en el que se basa su modelo, es el de que los inversionistas son esencialmente adversos al riesgo. Esto significa que los inversionistas deben ser compensados con mayor rendimiento para aceptar un mayor riesgo; consecuentemente, dadas por ejemplo dos opciones para invertir con igual tasa de rendimiento, un inversionista seleccionará un activo con un nivel menor de riesgo, rechazando la opción con mayor riesgo. En términos más técnicos, el supuesto significa que un inversionista maximiza la utilidad esperada en lugar de sólo tratar de maximizar los rendimientos esperados, es decir, el inversionista tomará en cuenta el riesgo al seleccionar entre dos o más opciones de inversión.

Asumiendo la aversión al riesgo, Markowitz desarrolló su modelo de selección de carteras de inversión que se resume en los siguientes puntos:

1. Las características más relevantes del portafolio se definen como su rendimiento esperado y alguna medida de dispersión de los posibles

rendimientos alrededor del rendimiento esperado, la varianza suele ser la más identificable.

2. Los inversionistas racionales escogerán tomar portafolios eficientes, los cuales maximicen el rendimiento esperado para un grado de riesgo dado o, alternativamente, minimicen el riesgo para un rendimiento esperado dado.
3. Es teóricamente posible identificar carteras eficientes por medio del análisis adecuado de la información de cada activo tomando en cuenta el rendimiento esperado, la varianza del rendimiento y la relación entre el rendimiento de cada activo y el rendimiento de cada otro activo, medida por la covarianza. La rentabilidad de cualquier activo es tomada como una variable aleatoria de carácter subjetivo, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es supuesta como conocida por el inversionista.
4. Siguiendo la función objetivo del problema se indica la proporción del fondo del inversionista que debe ser invertida en cada tipo de activo, de manera que se alcance eficiencia, esto es, que maximice el rendimiento para un grado de riesgo dado o que minimice el riesgo para un rendimiento esperado dado (Farrell, 1983).

Siguiendo el Modelo de Markowitz se supone que los rendimientos siguen una distribución de probabilidad normal, por lo que éstos quedan definidos por sólo dos parámetros, la esperanza matemática (media) y la desviación estándar (o la varianza). En base en esta suposición se puede hacer el análisis tomando en cuenta la media y la varianza.

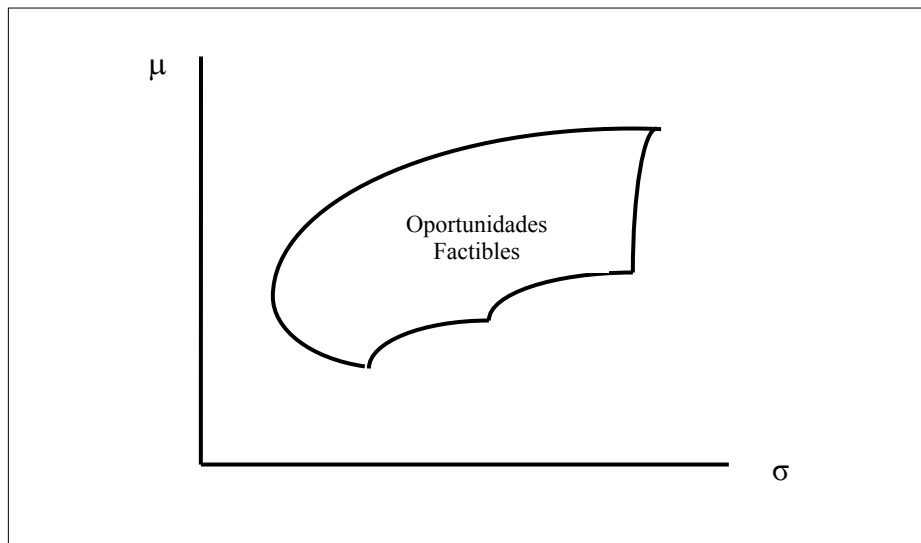


Figura 2.1 Conjunto de Oportunidades Factibles según la media y la desviación estándar de la cartera

Fuente: Gómez (2000)

Considerando un único período de inversión, un activo cualquiera producirá un rendimiento r_i , el cual es una variable aleatoria con media μ_i y desviación estándar σ_i . Entonces, cada activo puede ubicarse como un punto en la figura 2.1. Si el conjunto de inversiones posibles forman una figura como la anterior, el problema de la selección de una cartera de inversión es decidir entre los puntos de la figura (Gómez, 2000).

Para seleccionar óptimamente una cartera de inversión entre n activos, la formulación de Markowitz se plantea de la siguiente forma. Cada activo es caracterizado por un rendimiento que varía aleatoriamente con el tiempo. El riesgo de cada activo es medido por la variación de su rendimiento. Si cada componente x_i del vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa la proporción del activo i en el portafolio, entonces el rendimiento total de la cartera está dado por el producto escalar de X por el vector de rendimiento de los activos individuales $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Si además tenemos C , la matriz

$n \times n$ de las covarianzas de los n rendimientos, podemos obtener el rendimiento medio de la cartera definida por la expresión $\sum_{i=1}^n r_i x_i$ y su riesgo total definido por $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$.

El modelo asume que la meta del inversionista es diseñar una cartera que minimice el riesgo alcanzando una rentabilidad esperada R_{esp} determinada. Matemáticamente, el problema queda formulado como se define a continuación (Crama & Schyns, 2003):

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (2.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n r_i x_i = R_{esp} \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2.3)$$

$$x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

La primera restricción expresa la condición de alcanzar la rentabilidad esperada. La segunda restricción, llamada limitación de presupuesto, requiere que el 100% del presupuesto sea invertido en la cartera. Las limitaciones de no-negatividad expresan que las ventas en corto no son permitidas.

2.1.2 Concepto de la Frontera Eficiente

El concepto de eficiente se puede ilustrar por medio de la figura 2.2. El eje vertical de la figura corresponde al rendimiento esperado, el eje horizontal corresponde al riesgo del

activo medido por la desviación estándar, y el área sombreada representa el conjunto de todos los posibles portafolios que se pueden obtener del grupo de activos dados. Un cierto nivel de rendimiento y un cierto nivel de riesgo serán asociados con cada posible cartera. Es decir, cada portafolio es representado por un sólo punto en el área sombreada de la figura.

Se puede notar que el conjunto eficiente es representado por el límite superior izquierdo del área sombreada entre los puntos A y B. Carteras a lo largo de esta frontera eficiente dominan a los situados bajo la línea. Específicamente, esas carteras ofrecen mayores rendimientos que aquellas a un nivel equivalente de riesgo o, alternativamente, ofrecen menor riesgo a un equivalente nivel de rendimiento. Por ejemplo, se observa que el portafolio C, que no está situado sobre la frontera eficiente, está dominado por los portafolios D y E, los cuales si están situados sobre la frontera eficiente. El portafolio D ofrece mayor rendimiento que el portafolio C al mismo nivel de riesgo, mientras que el portafolio E implica un menor riesgo que el Portafolio C al mismo nivel de rendimiento.

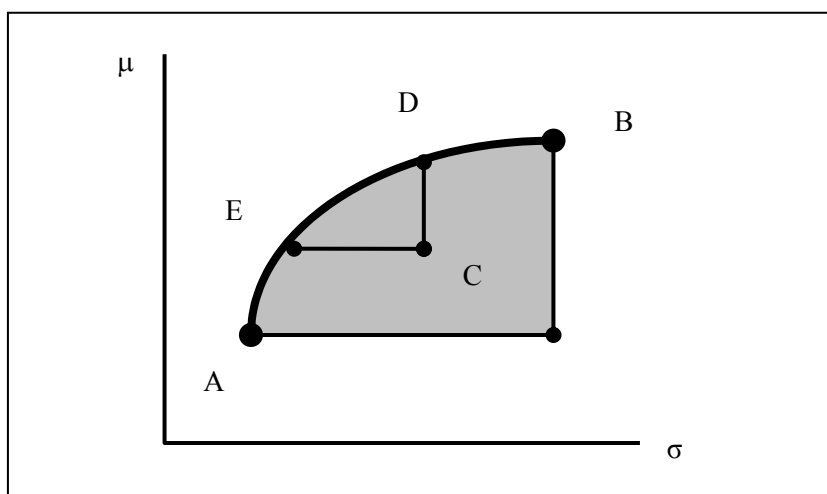


Figura 2.2 Frontera Eficiente

Fuente: Farrell (1983)

Inversionistas racionales preferirán escoger carteras eficientes, es decir, aquellas sobre la frontera y no debajo de ella. El portafolio particular que un inversionista individual seleccione de la frontera eficiente, depende de su grado de aversión al riesgo. Un inversionista que sea muy adverso al riesgo escogerá uno en la parte inferior izquierda de la frontera, mientras que un inversionista que no tenga tanta aversión al riesgo escogerá uno en la parte superior de la frontera. Al mismo tiempo, se nota que el inversionista buscará como cartera óptima aquella que alcance la curva de indiferencia más alta de las posibles, que será la cartera en la que se dé la tangencia entre una de sus curvas de indiferencia y la frontera eficiente.

2.2 Algoritmos Evolutivos

Los Algoritmos Evolutivos fueron introducidos en 1970 por John Holland y desde entonces han cobrado gran popularidad alrededor del mundo. Los Algoritmos Evolutivos son algoritmos de búsqueda basados en mecanismos observados en la evolución natural de los seres vivos. La investigación de Holland, sus colegas y sus estudiantes en la Universidad de Michigan se enfoca en establecer una analogía entre el proceso de selección natural y el proceso de encontrar soluciones aproximadas a un problema de gran complejidad (Davis, 1987).

En la teoría de la evolución de Darwin, el problema al que cada individuo se enfrenta cada día es el de la sobrevivencia. Para lograrlo, el individuo cuenta con las habilidades innatas grabadas en su material genético. Los cambios que sufren los individuos para adaptarse al ambiente se efectúan en los genes (unidad básica de codificación de cada uno de los atributos de un ser vivo). Debido en gran parte a la

selección natural estos atributos se transmiten a los descendientes del individuo, cuando éste se reproduce sexualmente.

Los Algoritmos Evolutivos toman esta idea de la sobrevivencia del más apto de un conjunto de individuos codificando la información de cada solución en un vector a modo de un cromosoma. El algoritmo genera artificialmente un nuevo conjunto de individuos usando partes del individuo más apto de la generación anterior y ocasionalmente, una nueva parte es introducida aleatoriamente para obtener diversidad. Cabe recalcar que a pesar de esta aleatoriedad, los algoritmos evolutivos no son simples caminatas aleatorias. La convergencia a una buena solución factible se logra al explotar eficientemente la información histórica que se tiene para especular en la nueva búsqueda, puntos con mayor rendimiento esperado en la función objetivo del problema (Coello; Davis, 1987; Goldberg, 1989; Santo).

La aplicación más común de los algoritmos evolutivos ha sido la solución de problemas de optimización, sin embargo, no todos los problemas pueden ser apropiados para esta técnica. Las características que debe tener el problema son las siguientes:

- Su espacio de búsqueda debe estar delimitado dentro de un cierto rango.
- Debe poderse definir una función de aptitud que nos indique qué tan buena o mala es una cierta respuesta, de manera que las buenas sean las que se propaguen más rápido.
- Las soluciones deben codificarse de una forma que resulte relativamente fácil de implementar en la computadora. La codificación más común y sencilla de implementar las respuestas es a través de cadenas binarias.

El proceso de búsqueda del algoritmo empieza con la especificación de los siguientes elementos:

- Una población inicial que suele ser generada aleatoriamente o utilizando algún otro método heurístico.
- Una medida de evaluación. Se suele utilizar la calidad como medida de evaluación según el valor de la función objetivo en el que se puede añadir un factor de penalidad para controlar la infactibilidad. Este factor puede ser estático o ajustarse dinámicamente.
- Un criterio de selección de cromosomas.
- Una o varias operaciones de recombinación.
- Una o varias operaciones de mutación.
- Un criterio de paro.

Existen varias estrategias de selección de cromosomas, como son las de truncado, torneo y ranking, por ruleta y por selección uniforme. Uno de los procedimientos más utilizados es el de la ruleta, en donde cada individuo tiene una sección de la ruleta que es directamente proporcional a su valor en la función objetivo. Para ilustrar mejor el procedimiento, supongamos que tenemos un problema con una función objetivo dada con una población de 4 cromosomas cuya calidad está dada por los valores mostrados en la tabla siguiente:

Tabla 2.1 Población de Cromosomas

Cromosoma	1	2	3	4
Vector	11010111	10000111	00010100	10110010
Valor f.o.	553	104	942	339
% del Total	28.53	5.36	48.61	17.5
Valor Total	1938			

Fuente: Elaboración Propia

Después de calcular los porcentajes de cada cromosoma se puede elaborar la ruleta de la Figura 2.3.

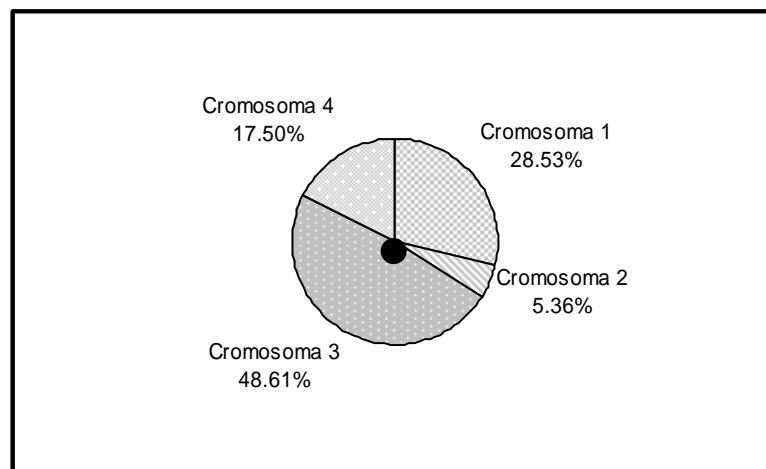


Figura 2.3 Ruleta (Proceso de Selección)

Fuente: Elaboración propia

La ruleta gira un número determinado de veces seleccionando el cromosoma que se tomará. Como los cromosomas con mayor valor en la función objetivo tienen un área más grande en la ruleta, tienen mayor probabilidad de salir escogidos y por lo tanto, serán seleccionados más veces que los cromosomas con valores menores en la función objetivo.

Con respecto a las operaciones de recombinación se presentan 3 ejemplos de los métodos más utilizados.

1. Crossover de un punto: se elige aleatoriamente un punto de ruptura en los padres y a partir de ese punto se intercambian sus bits.
2. Crossover de dos puntos: se eligen dos puntos de ruptura al azar para intercambiar.
3. Uniforme: En cada bit se elige al azar un padre para que contribuya con su bit al del hijo, mientras que el segundo hijo recibe el bit del otro padre.

Tomando los mismos datos del ejemplo anterior, supongamos que el cromosoma 3 (00010100) y el cromosoma 1 (11010111) fueron elegidos para ser padres de la siguiente generación. La recombinación del 50% produciría los siguientes individuos:

Cromosoma 5	Cromosoma 6
00010111	11010100

La recombinación del 25% y del 88% llevaría a la creación de los individuos:

Cromosoma 7	Cromosoma 8
00010110	11010101

Normalmente la frecuencia con la que se utiliza la recombinación se maneja como un porcentaje. Lo anterior produce que no todas las parejas de cromosomas se recombinen, sino que habrán algunas que pasen intactas a la siguiente generación. De esta forma se puede lograr que el individuo más apto no se recombine a lo largo de las distintas generaciones hasta que surja otro individuo mejor que él y lo desplace.

Con respecto a la operación de mutación, la más sencilla consiste en reemplazar con cierta probabilidad el valor de un bit, en el caso de la mutación simple, y reemplazar el valor de varios bits en el caso de la mutación múltiple. El papel de la mutación es el de introducir un factor de diversificación ya que, en ocasiones, la convergencia del procedimiento a buenas soluciones puede ser prematura y quedarse atrapado en óptimos locales. Otra forma de introducir nuevos elementos en una población es recombinar elementos tomados al azar sin considerar su calidad. La mutación también se suele manejar como un porcentaje que indica con qué frecuencia se efectuará, aunque este suele ser mucho menor que el de recombinación.

Normalmente se usan 2 criterios principales de paro del algoritmo: correrlo durante un número máximo de generaciones o detenerlo cuando la población se haya estabilizado, es decir, cuando la mayoría de los individuos tengan la misma calidad. Teniendo todos los elementos anteriores especificados, se puede empezar el procedimiento del Algoritmo Genético. En términos generales el algoritmo se reduce al proceso siguiente:

- $t = 0$;
- generar la población inicial $G(0)$;
- evaluar $G(0)$ en la función objetivo;
- repetir hasta que se alcance el criterio de paro:
 - $t = t + 1$;
 - seleccionar los mejores individuos que se cruzarán en la siguiente generación;
 - generar $G(t)$ usando $G(t-1)$ aplicando las operaciones de recombinación y mutación;

- evaluar $G(t)$ en la función objetivo;
- reportar un resultado.

La mayor ventaja de las estrategias evolutivas es que operan de forma simultánea con una población de varias soluciones, en vez de trabajar con una sola. Además, el proceso usa operadores probabilísticos, en vez de los típicos operadores determinísticos de otras técnicas de búsqueda. Cuando se usan para resolver problemas de optimización, como en el caso de esta tesis, al algoritmo es menos afectado por mínimos locales. La velocidad de convergencia depende en cierta medida de los parámetros que se utilicen, por ejemplo, el tamaño de la población y el número de generaciones.

2.2 Algoritmo de Templado Simulado

En 1983, un procedimiento para obtener soluciones aproximadas a problemas de optimización complejos fue propuesto por los investigadores Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi. El nuevo algoritmo, llamado Simulated Annealing (Templado Simulado), se basa en una analogía con el proceso termodinámico del comportamiento de un sistema físico al someterlo al agua caliente. Posteriormente, el algoritmo de Templado Simulado fue probado con éxito en numerosos problemas de optimización, mostrando gran eficacia en evitar quedar estancado en óptimos locales (Martí).

El algoritmo surgió cuando Kirkpatrick y sus colegas intentaron aplicar el criterio de Metrópolis en uno de sus problemas de optimización combinatoria en el diseño de circuitos electrónicos. Para lo que cual, establecieron un paralelismo entre los parámetros de la simulación termodinámica y los parámetros de la optimización local y entre la energía

libre del sistema y la función objetivo a minimizar. La tabla siguiente muestra las analogías en general que se hacen para transferir el proceso termodinámico al proceso de minimización.

Tabla 2.2 Analogía a Problemas de Optimización

Termodinámica	=	Búsqueda
Estados X del Sistema	=	Candidatos X de la Solución
Energía	=	Función Objetivo
Cambio de Estado	=	Movimiento en la Vecindad
Estado Congelado	=	Solución Heurística
Estado de Energía Mínima	=	Solución Global
Temperatura	=	Parámetro de Control

Fuente: Martí

Para poder entender el algoritmo de Templado Simulado se necesita aclarar primero en que consiste el criterio de Metrópolis. Las moléculas de una sustancia pasan por un proceso cuando van colocándose en los diferentes niveles energéticos buscando un equilibrio. La distribución de las partículas de la sustancia sigue una función, por lo que cuando una molécula se mueve, ese movimiento será aceptado en la simulación si la energía disminuye, o bien con una probabilidad proporcional a un factor. Suponga que un sistema se encuentra en un estado i , con una energía libre E_i y suponga que se genera un nuevo estado j con energía E_j . Si la diferencia de energía $E_i - E_j$ es menor o igual que cero, el estado j se acepta como nuevo estado con probabilidad uno. Si la diferencia de energía es mayor que cero, dicho estado se acepta con probabilidad $P = \text{Exp}\left(\frac{E_i - E_j}{c(t)}\right)$ donde $c(t)$ es la temperatura en el tiempo t .

El algoritmo de templado simulado es un procedimiento de generación de soluciones seguido de la aplicación del criterio de Metrópolis de manera repetitiva:

Paso 1: $t = 0$; generar un estado aleatorio i ,

Paso 2: $t = t + 1$; generar un estado j en una vecindad de i ,

Paso 3: Si $E_i - E_j \leq 0$, entonces $i = j$,

Si $E_i - E_j > 0$, entonces $i = j$ con probabilidad $P = \text{Exp}\left(\frac{E_i - E_j}{c(t)}\right)$,

Paso 4: Si no se cumple un criterio de optimalidad ir al paso 2.

De esta forma, Templado Simulado es un procedimiento basado en búsqueda local en donde todo movimiento de mejora es aceptado y se permiten movimientos de no mejora de acuerdo con unas probabilidades. Después de un número elevado de iteraciones y con la selección pertinente de los parámetros, el algoritmo converge asintóticamente al conjunto de soluciones óptimas.

La táctica de Templado Simulado se basa en escoger una temperatura inicial alta que proporcione una probabilidad elevada de aceptar movimientos de no mejora. Al transcurrir cada iteración, la temperatura se va reduciendo de tal forma que la probabilidad va disminuyendo conforme el proceso avanza y se va acercando a la solución óptima. Así, al principio del algoritmo se logra una gran diversificación en la búsqueda sin controlar demasiado la calidad de las soluciones visitadas. Posteriormente, se vuelve muy difícil aceptar movimientos de no mejora y se logra una disminución en el valor de la función

objetivo. Es por esto que el algoritmo cuenta con la habilidad de salir de óptimos locales al aceptar movimientos de no mejora en los estados intermedios.

Para lograr construir el algoritmo se tienen que especificar los siguientes parámetros:

- La temperatura inicial T_0 : determinada por la regla de que la probabilidad de aceptar un movimiento sea cercana a 1 para cada elemento de la vecindad $N(x)$ al principio del algoritmo.
- La temperatura final: se especifica de acuerdo a que la probabilidad de aceptar un movimiento sea cercano a 0 para cada elemento de la vecindad $N(x)$ al final del proceso.
- La velocidad de enfriamiento r : función de decrementación de la temperatura inicial, por ejemplo, $f(t) = at$ con $0 < a < 1$.
- La longitud L : longitud de la fase homogénea con temperatura constante, proporcional al tamaño esperado de $N(x)$.

De acuerdo a investigaciones realizadas por Holland, el algoritmo de Templado Simulado encuentra el óptimo con mayor probabilidad cuanto menor sea el valor de la temperatura.

2.4 Técnicas Recientes para la Optimización de Carteras de Inversión

Muchos investigadores han intentado atacar el problema de optimizar un portafolio de inversión a través de diversas técnicas. Los siguientes párrafos contienen en forma resumida las técnicas que se utilizan para resolver este tipo de problemas.

La complejidad para resolver el problema de selección de carteras está relacionada tanto con el tipo de restricciones que contiene, como con el tamaño del problema. Entre más restricciones se le agreguen y más activos se estén manejando, el modelo se vuelve más complejo. Tomando el Modelo de Markowitz como base, la solución más simple para el problema de optimización se obtiene cuando la restricción de no-negatividad es omitida del modelo (lo que refleja la admisión de ventas en corto). Para este caso, el método de Lagrange resulta muy útil para encontrar soluciones fácilmente. Pero cuando se aumenta la restricción de no-negatividad al modelo, el problema de Media-Varianza se vuelve más complejo. El problema obtenido entonces, puede ser aun resuelto por algoritmos como la adaptación de Wolfe al método Simplex (Wolfe, 1959).

Cuando el modelo incluye restricciones de comercio o de número máximo de activos en el portafolio, el problema se vuelve de tipo entero mixto no-lineal y los algoritmos clásicos ya no son capaces de encontrar el valor óptimo de la solución del problema (Crama & Schyns, 2003). Uno de los investigadores que han tratado de resolver este tipo de modelos es Perold, quien incluyó en su trabajo un conjunto de restricciones mayor al del modelo simple de Markowitz, pero no puso limitaciones en el número de activos en el modelo (Perold, 1984). Takehara fue otro investigador que tomó un modelo más complejo que el de Markowitz y desarrolló un algoritmo de punto interior de optimización de portafolios (Takehara, 1993). Muy pocos han estado interesados en la

aplicación de heurísticas de búsqueda local para la solución del problema de selección de carteras. Loraschi et al. propusieron utilizar algoritmos evolutivos (Loraschi et al., 1995). Chang et al. experimentaron con una variedad de metaheurísticas, incluyendo Templado Simulado en un modelo sin restricciones de comercio (Chang et al., 2000). Mansini y Speranza han realizado varios trabajos sobre selección de portafolios con restricciones de cardinalidad y tomando en cuenta costos mínimos de transacción a través de técnicas heurísticas (Chiodi et al., 2003; Kellerer et al., 2000; Mansini et al., 2003; Mansini & Speranza, 1999). Bauer por su parte, demostró algunos de los potenciales de usar procesos evolutivos en la búsqueda de reglas atractivas de comercio (Bauer & Fitz-Gerald, 2000). Fueron Maringer y Kellerer quienes lograron resolver el problema de optimización de carteras con restricciones de cardinalidad utilizando un algoritmo híbrido de búsqueda local que combina los principios de Templado Simulado con estrategias evolutivas (Maringer & Kellerer, 2003). Como conclusiones de su trabajo, encontraron que esta metaheurística arrojaba resultados confiables y altamente eficientes.

Uno de los trabajos de optimización que reúne mayor número de restricciones es el de Crama y Schyns (Crama & Schyns, 2003), en cuyo análisis está basada la mayor parte de esta tesis. Su modelo de problemas complejos de selección de carteras describe la aplicación del algoritmo de Templado Simulado para la solución del problema. La adición de restricciones adicionales al modelo de Media–Varianza de Markowitz convirtió el modelo en un problema mixto de programación cuadrática. Como los métodos de optimización exactos demostraron ser ineficientes para resolverlo, ellos propusieron la investigación de técnicas heurísticas que llevaran a mejores resultados. Los experimentos computacionales resultantes, demostraron la capacidad de su algoritmo para encontrar soluciones a problemas de tamaño medio en tiempos aceptables. Además, la forma en la

que fue construido el algoritmo permite la modificación o sustitución de la función objetivo por alguna otra medida de riesgo, sin tener la necesidad de alterar el algoritmo, por lo que resulta muy versátil al no estar basado en ninguna propiedad restrictiva del modelo.