UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

Escuela de Ciencias

Departamento de Actuaria

Una demostración del Teorema de Ramsey utilizando un argumento de forcing

Tesis que, para completar los requisitos del Programa de Honores presenta el/la estudiante

Isaac Gutíerrez Ruiz

163749

Luz Maria Garcia Avila

San Andrés Cholula, Puebla. Otoño, 2022

Tesis que, para completar los requisitos del Programa de Honores presenta el estudiante Nombre y ID

Director de Tesis

Luz Maria Garcia Avila

Presidente de Tesis

Nombre del Presidente

Secretario de Tesis

Nombre del Secretario

Índice general

Capítulo 1

Introducción

David Hilbert plantea en el Congreso internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900 una lista con veintitrés desafíos de la matemática del siglo XX. El primer problema consistía en determinar la cardinalidad de los números reales, es decir, cuántos números reales hay.

George Cantor, padre de la teoría de conjuntos, estaba convencido de que la cardinalidad de los reales era la cantidad infinita que seguía a la cantidad de los naturales, pero nunca pudo demostrarlo.

En las primeras décadas del siglo pasado, Kurt Gödel demostró que la hipótesis de Cantor no entraba en contradicción con los Axiomas de Zermelo-Fraenkel. Construyó un modelo, llamado el universo constructible, denotado por L, donde el tamaño de los números reales es $\aleph_1$, el siguiente número cardinal mayor a la cardinalidad de los números naturales. Con ello demuestra que la hipótesis de Cantor, mejor conocida como la hipótesis del continuo, no se puede refutar a partir de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel con Axioma de elección.

En 1963 Paul Cohen descubre un método llamado *forcing* que originalmente sirvió para introducir modelos en los que es falsa la hipótesis del continuo.

Forcing es un método que permite expandir un modelo de los axiomas de Zermelo-Fraenkel agregando conjuntos nuevos, para hacerlo se necesita un objeto G que filtra y selecciona los nuevos objetos que pertenecerán al modelo expandido. Ese objeto que filtra y selecciona a los nuevos elementos es un subconjunto de un orden parcial.

Estas últimas ideas de usar órdenes parciales y filtros es la contribución de esta tesis. Ya que definimos un orden parcial que nos permita probar un teorema clásico de combinatoria infinita. El teorema que demostramos con estas ideas del método de forcing es el Teorema de Ramsey, que dice que para cada n y m números naturales y cualquier función definida en el conjunto $[\mathbb{N}]^n$ que es el conjunto que contiene subconjuntos de números naturales de cardinalidad n y que se manda a m colores, existe un X subconjunto infinito de números naturales tal que f es constante en $[X]^n$.

Un resultado que se sigue del Teorema de Ramsey, es el Teorema de Ramsey finito. Estos tienen una cantidad considerable de aplicaciones en campos de la matemáticas como la teoría de grafos, geometría convexa y teoría de números. El teorema también ha encontrado un numero de usos en la teoría de complejidad computacional para evaluar algoritmos.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Axiomas de Zermelo-Fraenkel

La historia de la teoría de conjuntos comienza en 1874 cuando Georg Cantor publica el primer artículo sobre la misma en el Crelle's Journal donde plantea la existencia de diferentes tipos de conjuntos infinitos. Cantor continuaría trabajando durante las siguientes décadas agregando ordinales y cardinales a su teoría de conjuntos, esto permitió que la teoría de conjuntos pudiera utilizarse en otros campos de la matemática. En 1908 Ernst Zermelo intento formalizar los axiomas de la teoría de conjuntos, con estos siendo refinados por Thoralf Skolem y Abraham Fraenke, creando la teoría axiomática referida como los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Para los propósitos de esta tesis usaremos los axiomas de Zermelo-Fraenkel, los siguientes axiomas y definiciones vienen de (Kenneth Kunen, 1983) y de (Muñoz Quevedo, 1983).

Axioma 2.1. *Axioma de existencia*
Existe un conjunto x tal que $x = x$
$\exists x(x = x)$

Axioma 2.2. *Axioma de extensión*
Para cualesquiera x y y conjuntos, si todo elemento de x está en y y si todo elemento de y está en x, entonces $x = y$
$\forall x \, \forall y \, (\forall \, z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Axioma 2.3. *Axioma de fundación.*
Para cualquier conjunto x existe un conjunto y que pertenece a x tal que su intersección con x es vacía.
$\forall x \, [\exists \, y \, (y \in x) \rightarrow \, \exists y(y \in x \wedge \neg \, \exists z(z \in x \wedge z \in y))]$

Axioma 2.4. *Esquema de comprensión*
Para cualquier fórmula $\phi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ con variables libres $x, z, w_1, \ldots, w_n$ dado un conjunto z existe un conjunto y tal que para cada elemento x que esté en y, x pertenece a z y ϕ es verdadera para x.
$\forall z \forall w_1, \ldots, w_n \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$

Axioma 2.5. *Axioma de par*

Para cualquier par de conjuntos x, y existe un conjunto z tal que x y y son elementos de z.

$\forall x\, \forall y\, \exists z(x \in z \wedge y \in z)$

Axioma 2.6. *Axioma de la unión*

Dado cualquier conjunto $\mathcal{C}$ existe un conjunto que contiene todos los elementos de cada conjunto de $\mathcal{C}$

$\forall \mathcal{C}\, \exists a\, \forall y\, \forall x(x \in y \wedge y \in \mathcal{C} \to x \in a)$

Axioma 2.7. *Esquema de reemplazo*

Para cualquier formula $\phi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ con variables libres $x, y, w_1, w_2, \ldots, w_n$ para cualquier conjunto A existe un conjunto imagen Y

$\forall A\, \forall w_1, \ldots, w_n[\forall x \in A \exists! y \phi \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi]$

Decimos que $\phi(x, y)$ define una operación de conjuntos $\mathcal{F}$ si para cada x, $\mathcal{F}(x) = y$ tal que $\phi(x, y)$.

Sean A y B conjuntos, escribiremos que $A \subseteq B$ si y sólo si para cualquier x si $x \in A$ entonces $x \in B$

Teorema 2.8. *Existe un conjunto sin elementos y este conjunto es único.*

Demostración:

Existe un conjunto a por el Axioma de existencia y por el Axioma de extensión,

$$z = \{y \in a : y \neq y\}$$

es un conjunto. Note que z no tiene elementos.

Asumamos que z y z' son conjuntos sin elementos y son distintos, es decir, sin perdida de generalidad existe un $x \in z'$ tal que $x \notin z$, esto contradice el hecho de que z' no tiene elementos. ■

El conjunto sin elementos se denotará como $\emptyset$ o bien como 0 y lo llamaremos conjunto vacío.

Axioma 2.9. *Axioma de conjunto potencia*

Para todo conjunto x existe un conjunto y tal que todo subconjunto de x es un elemento de y.

$$\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y)$$

Denotamos a el conjunto de todos los subconjuntos de x como $\mathcal{P}(x)$ y lo llamamos el conjunto potencia de x.

Sean x, y conjuntos, entonces por el Axioma de par existe un conjunto z tal que $x, y \in z$y por el Axioma de comprensión existe un conjunto $\{r \in z : r = x \vee r = y\} = \{x, y\}$ y este conjunto es único por extensión. Note que $\{x\} = \{x, \mid x\}$ es el conjunto que exclusivamente contiene a x. Decimos que $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ es el par ordenado de x y y.

Sea A un conjunto, $S(A) = A \cup \{A\}$ es el sucesor de A para cada conjunto A, $\{A\}$ existe por el Axioma de par y $S(A)$ es conjunto por el Axioma de unión.

Axioma 2.10. *Axioma del infinito.*
$\exists x(\emptyset \in x \land \forall y \in x(S(y) \in x))$

Definición 2.11. *Para cualquiera A, B conjuntos definimos a el producto cartesiano de A y B como:*

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \land y \in B\}$$

Definición 2.12. *Definimos una relación R entre un conjunto A y un conjunto B, si y solo si, R es un subconjunto del $A \times B$.*

Definición 2.13. *Un orden total es un par $\langle A, R\rangle$ tal que R ordena totalmente a A, es decir, A es un conjunto y R una relación en $A \times A$, R es,*
Transitiva:

$$\forall x, y, z \in A(xRy \land yRz \to xRz),$$

Cumple la tricotomía:

$$\forall x, y \in A(x = y \lor xRy \lor yRx)$$

y R es irreflexiva:

$$\forall x \in A(\neg(xRx)).$$

La notación xRy es equivalente a $\langle x, y\rangle \in R$

Definición 2.14. *Decimos que R bien ordena a A o bien que $\langle A, R\rangle$ es buen orden si solo si $\langle A, R\rangle$ es un orden total y para todo B subconjunto de A no vacío tiene un R-mínimo elemento, es decir, existe un $b \in B$ tal que para cada $x \in B$, no ocurre xRb.*

Axioma 2.15. *Axioma de elección*
Para todo conjunto existe un relación que bien ordena al conjunto.
$\forall A \exists R(R$ *bien ordena a* $A)$

2.2. Números Naturales y Ordinales

Los números naturales y los ordinales juegan un rol importante en la teoría de conjuntos y son necesarios para demostrar el Principio de elección dependiente, este ultimo siendo necesario para demostrar la versión finita del Teorema de Ramsey. Las siguientes demostraciones y definiciones usadas para definir a los naturales y los ordinales vienen de (Weiss, 2008).

Definición 2.16. *Sea $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}\rangle$ y sea $x \in \mathbb{A}$, decimos que $pred_{\mathbb{A}}(x) = \left\{y \in A : y <^{\mathbb{A}} x\right\}$ es el conjunto de los predecesores de x.*

Definición 2.17. *Decimos que C es un conjunto inductivo si contiene al cero y es cerrado bajo sucesor, es decir, para cualquier conjunto x, si $x \in C$ entonces $S(x) \in C$.*

Definición 2.18. *Decimos que los números naturales son la intersección de todos los conjuntos inductivos (estos existen por el Axioma del infinito), es decir,* $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{A}$ *donde* $\mathcal{A}$ *es colección de todos los conjuntos inductivos.*

Teorema 2.19. *Los naturales son inductivos.*

Demostración:

Como el conjunto vacío es un elemento todos los conjunto inductivos y $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos $\emptyset \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in \mathbb{N}$, como $\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{A}$, podemos decir que $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}$, debido a que cada A es inductivo entonces $S(x) \in A$, por lo que $S(x) \in \mathbb{N}$. ■

Note que $\mathbb{N}$ es el conjunto inductivo mas pequeño con respecto a la contención de conjuntos, es decir, si D es inductivo entonces $\mathbb{N} \subseteq D$.

Por el Axioma 2.10 existe un conjunto inductivo B_0, luego definimos al conjunto B como:
$B = \{n \in B_0 : [n = \emptyset \vee (\exists l \in n)(n = S(l))] \wedge (\forall m \in n)[m = \emptyset \vee (\exists l \in n)(m = S(l))]\}$
Denotamos a los elementos de B en la siguiente forma:

- $\emptyset = 0$
- $0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$
- $1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = 2$
- $2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = 3$

  $\vdots$
- $n - 1 \cup \{n - 1\} = \{0, ..., n - 1\} = n$

Teorema 2.20. $B = \mathbb{N}$.

Demostración:

Sea $x \in B$, si x es vacío, entonces $x \in \mathbb{N}$. Si $x \neq \emptyset$, entonces $x = S(l)$ para algún $l \in x$, como todos los elementos de B son definidos de manera inductiva a través de sucesores del vacío y como $\mathbb{N}$ es inductivo y contiene al conjunto vacío, entonces $x \in \mathbb{N}$.

$\therefore B \subseteq \mathbb{N}$

Además como $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos y como por definición B es un conjunto inductivo $\mathbb{N} \subseteq B$.

$\therefore B = \mathbb{N}$. ■

Definición 2.21. *Decimos que un conjunto es transitivo si cualquier elemento del conjunto es un subconjunto de este, es decir, si* t *es transitivo entonces para cada* $x \in t$ *se tiene que* $x \subseteq t$.

Teorema 2.22. *Cada natural es un conjunto transitivo y* $\mathbb{N}$ *es un conjunto transitivo.*

Demostración:

Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que n no es transitivo. Entonces el conjunto $x = \{k \in n : k \nsubseteq n\}$ es no vacío, por el Axioma de Fundación tenemos que existe un $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$. Luego como $\emptyset \notin x$ y $y \in x$, $y = S(l)$ para algún $l \in n$ por la definición de natural. Pero como $l \in y$, $l \notin x$ y $l \subseteq n$, por lo tanto $y = l \cap \{l\} \subseteq n$ lo que contradice $y \in x$.

Para probar que $\mathbb{N}$ es transitivo supongamos que existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $\{m : m \in r \wedge m \notin \mathbb{N}\}$ es no vacío.

Definimos x= $\{m \in r : m \notin \mathbb{N}\}$, por el Axioma de fundación sabemos que existe un $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$. Como $y \in r$, tenemos que $y = S(l)$ para algún $l \in r$. Como $l \in y$ y $y \cap x = \emptyset$, debemos tener $l \in \mathbb{N}$ pero $y = S(l) \in \mathbb{N}$, lo cual contradice que $y \in x$. ■

Definición 2.23. *Decimos que h es un ordinal ,si y solo si, h es conjunto transitivo y bien ordenado por $\in$, donde $\in_h = \{\langle y, z\rangle \in h \times h : y \in z\}$.*

Denotamos la clase $\{\alpha : \alpha \text{ ordinal}\}$ como $\mathbb{ON}$.

Definición 2.24. *Definimos la cardinalidad de un conjunto X, como el menor ordinal n tal que existe una función $F : X \to n$ biyectiva y la denotamos como $|X|$.*

Los teoremas en la siguiente sección vienen de (Ignasi Jané, 2010) y los utilizaremos para demostrar el Principio de elección dependiente.

Definición 2.25. *Sea $f : a \to b$. Si $c \subseteq a$, decimos que la imagen de c bajo f es el conjunto $f[c] = \{f(x) : x \in c\}$.*

Definición 2.26. *Sea $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}$ un segmento inicial de $\mathbb{A}$ es un subconjunto I de A tal que para cualquier pareja $x, y \in A$, si $x \in I$ y $y <^{\mathbb{A}} x$, entonces $y \in I$.*

Definición 2.27. *Sean $\mathbb{A} = \left\langle A, <^{\mathbb{A}}\right\rangle$ y $\mathbb{B} = \left\langle B, <^{\mathbb{B}}\right\rangle$ órdenes totales. Un encaje de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ es una biyección $f : A \to B$ tal que para todo $x, y \in A$, $x <^{\mathbb{A}} y$ si y solo si $f(x) <^{\mathbb{B}} f(y)$.*

Definición 2.28. *Una función $f : A \to B$ es estrictamente creciente si y solo si para todo $x, y \in A$ $x <^{\mathbb{A}} y$ implica $f(x) <^{\mathbb{B}} f(y)$*

Definición 2.29. *Sean $\mathbb{A} = \left\langle A, <^{\mathbb{A}}\right\rangle$ y $\mathbb{B} = \left\langle B, <^{\mathbb{B}}\right\rangle$ ordenes totales. Un isomorfismo entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ es un encaje de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Diremos que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son isomorfos si y solo si existe un isomorfismo entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$. Escribimos $h : \mathbb{A} \cong \mathbb{B}$ para expresar que h es un isomorfismo entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$. Un isomorfismo también es una función estrictamente creciente de A a B.*

Teorema 2.30 (Principio de inducción para un conjunto bien ordenado)**.** *Sea $\mathbb{A} = \langle A, <\rangle$ un buen orden. Si B es un subconjunto de A tal que*

$$(1) \quad (\forall x \in A)\left(\operatorname{pred}_{\mathbb{A}}(x) \subseteq B \to x \in B\right),$$

entonces $B = A$.

Demostración:

Si $B \neq A$, sea a el mínimo de $A \backslash B$. Por lo tanto, $a \notin B$, pero para todo $x < a, x \in B$, en otras palabras,

$$\mathrm{pred}_{\mathbb{A}}(a) \subseteq B, \text{ con } a \notin B.$$

Pero esto contradice (1). ■

Teorema 2.31 (Teorema de recursión para buenos órdenes)**.** *Sea $\mathbb{A} = \langle A, < \rangle$ un buen orden y sea $\mathcal{G}$ una operación de conjuntos. Existe una función única h con dominio A tal que para cada $x \in A$*

$$(1) \quad h(x) = \mathcal{G}\left(h\left|_{pred_{\mathbb{A}}(x)}\right.\right).$$

Demostración: Primero estableceremos la unicidad de h. Supongamos que h y g son funciones que satisfacen (1). Si $h \neq g$ entonces el conjunto

$$X = \{x \in A : h(x) \neq g(x)\}$$

es no vacío y tiene un mínimo elemento a. Sin embargo esto es imposible, porque como a es el mínimo de X, $h|_{pred_{\mathbb{A}}(a)} = g|_{pred_{\mathbb{A}}(a)}$, entonces $h(a) = g(a)$.

Ahora demostraremos la existencia de h. Para $a \in A$, sea

$$A(a) = \{x \in A : x \leq a\} = \mathrm{pred}(a) \cup \{a\}.$$

Claramente, $A(a)$ es un segmento inicial de A. Una a-aproximación (a la función h) es una función p con dominio $A(a)$ tal que, para cualquier $x \in A(a)$, $p(x) = \mathcal{G}(p|_{pred_{\mathbb{A}}}(x))$. Una aproximación es una a-aproximación para algún $a \in A$.

Afirmación 1: Las aproximaciones son comparables en parejas, es decir, si p y q son aproximaciones y $x \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$, entonces $p(x) = q(x)$.

Sean p y q una a-aproximación y una b-aproximación, respectivamente, y $a \leq b$. Si la afirmación es falsa, entonces, como en la prueba de unicidad de h, el conjunto de todos los $x \in A(a)$ tal que $p(x) \neq q(x)$ tendría un mínimo que nos llevaría a una contradicción.

Afirmación 2: Para cada $a \in A$, hay una a-aproximación única.

Vamos a probar esta afirmación por inducción, es decir, aplicaremos el teorema 2.30. Sea B el conjunto de todos los $x \in A$ tales que existe una x-aproximación. Debemos demostrar que

$$(\forall x \in A)\left(\mathrm{pred}_{\mathbb{A}}(x) \subseteq B \rightarrow x \in B\right),$$

ya que esto implica $A = B$, y nuestra afirmación.

Sea $a \in A$ y supongamos que $\mathrm{pred}_{\mathbb{A}}(a) \subseteq B$. Terminaremos cuando demostremos que $a \in B$, es decir, existe la a-aproximación única. Por la afirmación 1 tenemos que las x-aproximaciones son únicas, tenemos que demostrar que existe al menos una a-aproximación.

Como $\text{pred}_{\mathbb{A}}(a) \subseteq B$, para cada $x < a$, hay alguna x-aproximación única, p_x. Por el esquema de remplazo, el conjunto $\{p_x : x \in \text{pred}_{\mathbb{A}}(a)\}$ existe, para toda x-aproximación con $x < a$. La operación de conjunto $\mathcal{F}\left[\text{pred}_{\mathbb{A}}(a)\right]$, definida por

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \text{la } x\text{-aproximación única} & \text{si } x \in \text{pred}_{\mathbb{A}}(a) \\ \emptyset & \text{si } x \notin \text{pred}_{\mathbb{A}}(a) \end{cases}$$

justifica la existencia de $\{p_x : x \in \text{pred}_{\mathbb{A}}(a)\}$ usando el esquema de remplazo.

Sea $s = \bigcup \{p_x : x \in \text{pred}_{\mathbb{A}}(x)\}$. Por la unicidad de las x-aproximaciones (para $x < a$), s es una función. Su dominio es $\text{pred}_{\mathbb{A}}(a)$. Ahora sea

$$p = s \cup \{\langle a, \mathcal{G}(s) \rangle\}.$$

Como $a \notin \text{dom}(s), p$ también es una función y su dominio es $A(a)$. Mostraremos que p es la a-aproximación que estamos buscando.

Primero observemos que para todo $x < a$:

$$(2) \quad p|_{\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)} = p_x|_{\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)}$$

mientras que

$$(3) \quad p|_{\text{pred}_{\mathbb{A}}(a)} = s.$$

Ahora verificamos que para cada $x \in A(a), p(x) = \mathcal{G}\left(p\left|\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)\right)\right.$. Sea $x \in A(a)$, entonces $x < a$ o $x = a$. Si $x < a$, entonces $x \in \text{dom}\left(p_x\right)$, por (2),

$$p(x) = p_x(x) = \mathcal{G}\left(p_x\left|\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)\right) = \mathcal{G}\left(p\left|\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)\right)\right.\right.,$$

mientras que, si $x = a$, entonces, por (3),

$$p(a) = \mathcal{G}(s) = \mathcal{G}\left(p\left|\text{pred}_{\mathbb{A}}(a)\right)\right..$$

Esto concluye la demostración de la afirmación 2.

Sea h la unión de los conjuntos de aproximación:

$$h = \bigcup\{p : (\exists a \in A) \text{ (} p \text{ es una } a\text{-aproximación) }\}.$$

El conjunto h existe por el esquema de remplazo.

Por la afirmación $1, h$ es una función y por la afirmación 2, su dominio es A. Finalmente, h cumple con (1), porque si $x \in A$, entonces como $p_x = h|_{A(x)}$

$$h(x) = p_x(x) = \mathcal{G}\left(p_x\left|_{\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)}\right.\right) = \mathcal{G}\left(h\left|_{\text{pred}_{\mathbb{A}}(x)}\right.\right).$$

Este concluye con el teorema.■

Definición 2.32. *Sea α un ordinal, decimos que α es un ordinal sucesor si $\alpha = S(\beta)$, para algún ordinal β. β es el límite ordinal de α denotado por $Lim(\alpha)$ si no es 0 o un sucesor ordinal.*

Teorema 2.33 (Teorema de la enumeración)**.** *Todo buen orden es isomorfo con un único ordinal, es decir, para cada $\mathbb{A}$ conjunto bien ordenado hay un único ordinal α tal que $\mathbb{A} \cong \langle \alpha, \epsilon_\alpha \rangle$.*

Demostración:

Dos ordinales distintos no pueden ser isomorfos, ya que uno de ellos es un segmento inicial propio del otro. En consecuencia, un conjunto bien ordenado puede ser isomorfo a lo más un ordinal. Entonces, solo tenemos que mostrar que todo conjunto bien ordenado es isomorfo con algún ordinal.

Sea $\mathbb{A}$ un buen orden. Por el teorema de recursión para buenos órdenes, existe una única función h, con dominio A tal que para todo $a \in A$:

$$h(a) = \{h(x) : x <^{\mathbb{A}} a\}$$

(i) Si $x, y \in A$ y $y <^{\mathbb{A}} x$, entonces $h(y) \in h(x)$ y $h(y) \subseteq h(x)$. Sea $y <^{\mathbb{A}} x$ entonces $h(y) \in h(x)$ es inmediato de la definición de h, mientras que $h(y) \subseteq h(x)$ se sigue de la transitividad de $<^{\mathbb{A}}$.

(ii) Si $x \in A, h(x)$ es un conjunto transitivo, también lo es $h[A]$. Sean $x \in A$ y $u \in h(x)$. Existe $y \in A$ tal que $y <^{\mathbb{A}} x$ y $u = h(y)$. Por lo tanto, por (i), $u \subseteq h(x)$ y $h(x)$ es transitivo. Es claro que $h[A]$ es transitiva, ya que para todo $x \in A, h(x) \subseteq h[A]$, es decir, para todo $u \in h[A]$, $u \subseteq h[A]$.

(iii) Para cada $x \in A, h(x)$ es un ordinal. Argumentamos por inducción sobre el conjunto bien ordenado $\mathbb{A}$ (Teorema 2.30). Sea B el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $h(x)$ es un ordinal. Si $a \in A$ satisface que $pred_{\mathrm{A}}(a) \subseteq B$, entonces $h(a)$ es un conjunto de ordinales. Por (ii) $h(a)$ es transitivo. Pero un conjunto transitivo de ordinales es un ordinal. Por lo tanto $a \in B$.

(iv) $h[A]$ es un ordinal. Esto es así porque, por (ii) y (iii), $h[A]$ es un conjunto transitivo de ordinales. Sea $\alpha = h[A]$. Obviamente, h es sobreyectiva en α. Por (i), si $x, y \in A$ y $y <^{\mathrm{A}} x$, entonces $h(y) \in h(x)$. Por lo tanto, h es estrictamente creciente, por lo tanto, un isomorfismo entre A y α.■

Definición 2.34. *El tipo de orden de un conjunto bien ordenado $\mathbb{A}$, en símbolos $ot(\mathbb{A})$ es el único ordinal con el que $\mathbb{A}$ es isomorfo.*

Teorema 2.35 (Teorema de recursión para Ordinales)**.** *Sea α algún ordinal y sea $\mathcal{G}$ una operación de conjuntos. Existe una función h con dominio α tal que para todo $\beta < \alpha, h(\beta) = \mathcal{G}(h|_\beta)$.*

Para demostrar este teorema primero damos la segunda forma de este teorema y lo demostramos.

Teorema 2.36. *Sea δ un ordinal diferente a cero. Dado un conjunto e y dadas dos operaciones de conjuntos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$, existe una función h con dominio δ tal que para cada ordinal α tal que $\alpha < \delta$:*

$$\begin{aligned} &h(0) = e \\ &h(\alpha + 1) = \mathcal{G}(h(\alpha)) \textit{ si } \alpha + 1 < \delta \\ &h(\alpha) \quad = \mathcal{H}(h|_\alpha) \textit{ si } \mathrm{Lim}(\alpha). \end{aligned}$$

Demostración:

Existe a lo más una función que satisface las condiciones anteriores, supongamos que existen dos g y h que las satisfacen con $h \neq g$. Sea α el mínimo ordinal menor que δ tal que $h(\alpha) \neq g(\alpha)$, no puede ser 0 por la primera cláusula, o el sucesor de un ordinal por la segunda cláusula o un límite ordinal por la tercera condición.

Para ver que existe al menos una función h que satisface las cláusulas reduciremos nuestro teorema a el teorema 2.35. Definimos una operación de conjunto $\mathcal{F}$ como sigue:

(1) Si x es una función cuyo dominio es un ordinal α_x, sea

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} e, & \text{si } \alpha_x = 0 \\ \mathcal{G}(x(\alpha)), & \text{si } \alpha_x = \alpha + 1 \\ \mathcal{H}(x), & \text{si } \alpha_x \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

(2) En otro caso $\mathcal{F}(x) = \emptyset$.

Por el teorema 2.35, existe una función h con dominio δ tal que, para cada $\alpha < \delta, h(\alpha) = \mathcal{F}(h|_\alpha)$. Como, para cada $\alpha < \delta, h|_\alpha$ es una función con dominio α, es inmediato que h satisface las cláusulas requeridas. ■

Definición 2.37. *Se dice que dos conjuntos a, b tienen la misma cardinalidad si son biyectables, es decir, existe una función biyectiva entre a y b . Si a es inyectable en b escribimos $a \preceq b$, también decimos que la cardinalidad de a es igual o menor que la cardinalidad de b. Si a es inyectable en b, pero no biyectable con b escribimos $a \prec b$, decimos que la cardinalidad de a es estrictamente menor que la cardinalidad de b.*

Definición 2.38. *Decimos que f para un conjunto a con dominio a es una función de elección si para cualquier $x \in a$ tal que si $x \neq \emptyset$, entonces $f(x) \in x$.*

Teorema 2.39. *Un conjunto es bien ordenable si y solo si es biyectable con algún ordinal.*

Demostración:

Si un conjunto es bien ordenable, entonces, por el teorema de enumeración (teorema 2.33), es biyectable con algún ordinal. Por el contrario, si f es una biyección entre el conjunto a y un ordinal α, entonces la relación $\triangleleft$ en a es tal que para todo $x, y \in a$.

$$x \triangleleft y \text{ sii } f(x) < f(y)$$

es un buen orden sobre a y f es un isomorfismo entre conjuntos bien ordenados $\langle a, \triangleleft \rangle$ y $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ porque f es estrictamente creciente. ■

Teorema 2.40. *Para todo conjunto a existe un ordinal δ tal que $\delta \npreceq a$.*

Demostración:

Dado un conjunto a, considere el conjunto b de todos los ordinales que son inyectables en a, es decir

$$b = \{\beta : \beta \preceq a\}.$$

Para ver que tal conjunto existe, sea $W(a)$ el conjunto de todos los pares $\langle x, \triangleleft\rangle$ tal que $x \subseteq a$ y $\triangleleft$ es un buen orden sobre x. $W(a)$ existe por esquema de separación, porque cada par $\langle x, \triangleleft\rangle$ es un elemento de $\mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a \times a)$. Por reemplazo, el conjunto $\{ot(\langle x, \triangleleft\rangle) : \langle x, \triangleleft\rangle \in b\}$ también existe. Pero este conjunto es precisamente b.

El conjunto b es transitivo, porque si $\beta \in b, \gamma < \beta$, y f es una función uno a uno en $\beta \to a$, entonces $f|_\gamma$ es una función uno a uno sobre γ a a, por lo que $\gamma \in b$. Por tanto, por la definición de ordinal (Definición 2.23), b es un ordinal. Ponga $b = \delta$. Si $\delta \preceq a$, entonces $\delta \in b$, es decir, $\delta \in \delta$, lo cual es imposible. Así $\delta \npreceq a$. ■

Teorema 2.41. *(Zermelo)*

Un conjunto a es bien ordenable si y solo si existe una función de elección para $\mathcal{P}(a)$.

Demostración:

Si $<$ es un buen orden en a, entonces la función $f : (\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}) \to a$ tal que para cada conjunto no vacío $x \subseteq a$, $f(x)$ es el mínimo elemento de x en el orden $<$, es una función de elección para $\mathcal{P}(a)$

Para la otra implicación, supongamos que f es una función de elección para $\mathcal{P}(a)$. Mostraremos que a es biyectable con un ordinal, el cual, por el teorema 2.39 implica que a es bien ordenable.

Sea $e \notin a$. Sea δ un ordinal tal que $\delta \npreceq a$ (existe por el teorema 2.40). Por el teorema de recursión de los ordinales (teorema 2.35) existe una función h con dominio δ tal que para cada ordinal $\alpha < \delta$,

$$h(\alpha) = \begin{cases} f(a \backslash h[\alpha]) & \text{si } h[\alpha] \subset a \\ e & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

En detalle, $h(\alpha) = \mathcal{G}(h|_\alpha)$, donde $\mathcal{G}$ es la función con parámetro a definido por

$$\mathcal{G}(x) = \begin{cases} f(a \backslash \operatorname{ran}(x)) & \text{si } x \text{ es una función y } \operatorname{ran}(x) \subset a \\ e & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Por la definición h y por la elección e es claro que las tres condiciones de los ordinales $\alpha < \delta$ son equivalentes.

$$h(\alpha) \neq e, \quad h[\alpha] \subset a, \quad h(\alpha) \in a.$$

Supongamos que $\beta < \alpha < \delta$. Por lo tanto, $h[\beta] \subseteq h[\alpha]$. Por eso, si $h(\alpha) \in a$, es decir, si $h[\alpha] \subset a$, entonces $h[\beta] \subset a$, es decir, $h(\beta) \in a$. Además, $h(\alpha) \neq h(\beta)$, como $h(\beta) \in h[\alpha]$ pero $h(\alpha) \notin h[\alpha]$. Esto es,

$$(1) \quad \text{si } h(\alpha) \in a \text{ y } \beta < \alpha, \text{ entonces } h(\beta) \in a \text{ y } h(\alpha) \neq h(\beta).$$

Si $h(\alpha) \in a$ para todos los ordinales $\alpha < \delta$, entonces, por (1) h es una función uno a uno en δ hacia a, lo que es imposible, debido a que $\delta \not\preceq a$. Por lo tanto, existe un ordinal $\alpha < \delta$ tal que $h(\alpha) \notin a$.

Sea α_0 el mínimo ordinal con dicha propiedad. Si $\beta < \alpha_0$, entonces $h(\beta) \in a$, de modo que $h\left[\alpha_0\right] \subseteq a$. Como $h\left(\alpha_0\right) \notin a, h\left[\alpha_0\right]$ no es un subconjunto propio de a, lo que significa que $h\left[\alpha_0\right] = a$. Por $(1), h\left|_{\alpha_0}\right.$ es una biyección entre α_0 y a. ■

Definición 2.42. *Dado un conjunto a y un $n \in \mathbb{N}$, una secuencia de n elementos de a es una función $s : n \to a$.*

Definición 2.43. *Dado un conjunto a una secuencia infinita es una función $s : \mathbb{N} \to a$. Se suele denotar a la secuencia infinita de la siguiente manera $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$.*

Teorema 2.44. *Principio de elección dependiente*

Si R es una relación sobre un conjunto A, el $dom(R) = A$ y $a \in A$, entonces existe un secuencia infinita $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ de elementos de A tal que $a_0 = a$, y para $n \in \mathbb{N}$ $a_n R a_{n+1}$.

Demostración:

Sea f una función de elección (la función existe por el teorema 2.41) para $\mathcal{P}(A)\backslash\emptyset$. Dado que $\mathrm{dom}(R) = A$, para cada $x \in A$ el conjunto $\{y \in A : xRy\}$ no es vacío. Por tanto, existe una función $g : A \to A$ tal que para todo $x \in A$,

$$g(x) = f(\{y \in A : xRy\})$$

Claramente, $xRg(x)$ para todo $x \in A$. Existe una función $h : \mathbb{N} \to A$ tal que

1. $h(0) = a$, y
2. para todo $n \in \mathbb{N}, h(n+1) = g(h(n))$.

Dejando $h = \langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, es decir, $a_n = h(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $a_0 = a$, y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[an + 1 = g\left(a_n\right) = f\left(y \in A : a_n Ry\right)]$ así $a_n R a_{n+1}$. ■

2.3. Ordenes Parciales

Los ordenes parciales son esenciales para poder utilizar técnicas de tipo Forcing, esto se debe a que necesitamos definiciones de filtro y densos para demostrar el Lema de Rasiowa–Sikorki que usaremos para demostrar el Teorema de Ramsey. Ordenes parciales también serán utilizados para definir arboles que utilizaremos para demostrar la versión finita del Teorema de Ramsey.

Las definiciones de orden parcial, filtro y denso vienen de (Ignasi Jané, 2010).

Definición 2.45. *Un orden parcial es el par $\langle\mathbb{P}, \leq\rangle$ donde $\mathbb{P}$ es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria en $\mathbb{P}$ que es transitiva y reflexiva, es decir,*

- $\forall p, q, r \in \mathbb{P} : (p \leq q \wedge q \leq r) \Longrightarrow p \leq r$

- $\forall p \in \mathbb{P} : p \leq p$,

respectivamente.

Sean $p, q \in \mathbb{P}$ si $p \leq q$ leeremos “p extiende a q”. Los elementos de $\mathbb{P}$ son llamados condiciones.

$\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ es un orden parcial estricto si satisface además la condición

$$\forall p, q \in \mathbb{P} : (p \leq q \wedge q \leq p) \Longrightarrow p = q$$

En tal caso, se define $p < q$ si y sólo si $p \leq q$ y $p \neq q$.

Definición 2.46. *Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial. Una cadena en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $C \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in C (p \leq q \vee q \leq p)$.*

Diremos que p y q son compatibles si existe un $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, de lo contrario diremos p y q son incompatibles y se denota como $p \perp q$. Una anticadena en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in A$: $p \neq q \Longrightarrow p \perp q$.

Definición 2.47. *Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial, diremos que $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$,si y solo si, $\forall p \in \mathbb{P}$, $\exists q \in D$: $q \leq p$.*

Definición 2.48. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial, diremos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$,si y solo si,*
(a) $\forall p, q \in G \; \exists r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$ y
(b) $\forall p \in G \; \forall q \in \mathbb{P} (p \leq q \Rightarrow q \in G)$.

Definición 2.49. *Definimos $B_0, B_1, B_2, ..., B_n$ como una partición de A si:*
$i)$ $B_i \subseteq A$
$ii)$ $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$: $B_i \neq \emptyset$
$iii)$ $\bigcup_{i=0}^{n} B_i = A$
$iiii)$ $\forall i, j \in \{0, 1, ..., n\}$: $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$

Teorema 2.50. *Sean $A_1, A_2, A_3 ... A_n$ conjuntos finitos entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es finito.*

Demostración por inducción:

Si $k = 2$, sean $\bigcup_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cup A_2$ y $B_1 = A_1 \setminus A_2$ observemos que B_1 es finito y disjunto de A_2, también podemos decir que $|A_2| = r$ y $|B_1| = m$ para algunos $m, r \in \mathbb{N}$, por lo tanto existen funciones biyectivas F y G tales que $F : r \to A_2$ y $G : m \to B_1$.

Sea $h : r + m \to (B_1 \cup A_2)$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < r \\ g(x - r) & \text{si } x \geq r \end{cases}$$

Nótese que $h(x)$ es biyectiva y $r + m$ es finito por lo que la $A_1 \cup A_2$ es finito.
Supongamos que nuestra hipótesis es verdadera para $k = n$, es decir, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es finito.

Demostraremos que la proposición es verdadera para $k = n + 1$.

Como $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}$ y ambos son finitos, definimos $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus A_{n+1}$, como $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$ y estos dos conjuntos son finitos y disjuntos, entonces $|A_{n+1}| = r$ y $|B_n| = m$ para algunos $m, r \in \mathbb{N}$. Sean F y G funciones biyectivas tales que $F : r \to A_{n+1}$ y $G : m \to B_n$.

Definimos $h : r + m \to (B_n \cup A_{n+1})$

$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < r \\ g(x - r) & \text{si } x \geq r \end{cases}$

Nótese que $h(x)$ es biyectiva y $r + m$ es finito por lo que la $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ es finita. ■

Nuestra definiciones de función suelo y función techo fueron obtenidas de (Graham, Knuth, y Patashnik, 1994):

Definición 2.51. *Decimos que $\lceil x \rceil$ es el techo de x si $\lceil x \rceil$ es el menor entero mayor o igual a x, es decir, $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$.*

Decimos que $\lfloor x \rfloor$ es el suelo de x si $\lfloor x \rfloor$ es mayor entero menor o igual a x, es decir, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

Teorema 2.52. *Para cualquier $x \in \mathbb{R}$: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$.*

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$ por la definición 2.51 sabemos que $x \leq \lceil x \rceil$, si x es entero entonces

$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$ y $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1$. Si x no es entero entonces $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$ y $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$, por lo tanto $\lceil x \rceil - x < 1$ y $x - \lfloor x \rfloor < 1$. Reescribiendo estas desigualdades tenemos que,

$$\begin{gathered} x - \lfloor x \rfloor < 1 \\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \end{gathered}$$

y que

$$\begin{gathered} \lceil x \rceil - x < 1 \\ \lceil x \rceil < 1 + x. \blacksquare \end{gathered}$$

Teorema 2.53. *Sea A un conjunto finito tal que $|A| = n$ y particionado por $B_0, B_1, B_2, ..., B_k$ entonces existe un B_i tal que $|B_i| \geq \lceil \frac{n}{k} \rceil$.*

Demostración: Observemos que $k \leq n$, porque si $k > n$ entonces algunos $B_i = \emptyset$.

Supongamos que la hipótesis es falsa, es decir, para todo subconjunto B_i tenemos que $|B_i| < \lceil \frac{n}{k} \rceil$, por lo que toda B_i cumple con $|B_i| \leq \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$ entonces $\left| \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right| \leq \left(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1 \right) k$, por la desigualdad $\lceil x \rceil < x + 1$ del Teorema 2.52 tenemos que,

$$\begin{gathered} (\lceil \tfrac{n}{k} \rceil - 1) < \tfrac{n}{k} \\ (\lceil \tfrac{n}{k} \rceil - 1)k < n \\ \left| \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right| < (\lceil \tfrac{n}{k} \rceil - 1)k < n \end{gathered}$$

lo cual es una contradicción. ■

Teorema 2.54. *Sea A un conjunto infinito particionado por $B_0, B_1, B_2, ..., B_k$ entonces existe B_i tal que B_i es infinito.*

Demostración:

Supongamos lo contrario, asumamos que todas las particiones son finitas, por la definición de partición tenemos que $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = A$, pero por el Teorema 2.50 tenemos que la unión de conjuntos finitos es finita, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 2.55 (Lema de Rasiowa–Sikorski)**.** *Sean $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial y $\mathcal{D} = \{D_i : D_i$ es denso en $\mathbb{P}, i \in \mathbb{N}\}$,*

entonces existe un G filtro $\mathcal{D}$-genérico, es decir, $D_i \cap G \neq \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Sea $r \in \mathbb{P}$ como D_1 es denso existe un $d_1 \in D_1$ tal que $d_1 \leq r$.

Existe un $d_2 \in D_2$ tal que $d_2 \leq d_1$ porque D_2 es denso, inductivamente suponemos que se tiene $d_n \leq d_{n-1} \leq ... \leq d_1$ y $d_i \in D_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sea $d_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $d_{n+1} \leq d_n$ porque D_{n+1} es denso.

Definimos $G = \{p \in \mathbb{P} : \exists i \in \mathbb{N}\, d_i \leq p\}$ por reflexividad $d_i \leq d_i$, entonces $d_i \in G$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $D_i \cap G \neq \emptyset$. Ahora demostraremos que G es un filtro en $\mathbb{P}$.

i) Sean $p, q \in G$ entonces $d_i \leq p$ y $d_j \leq q$, para algunas $i, j \in \mathbb{N}$.

Si $i = j$ es trivial,

Si $i \neq j$ entonces podemos decir sin pérdida de generalidad que $i < j$ por lo que $d_j \leq d_i$.

por lo tanto $d_j \leq p \wedge d_j \leq q$.

ii) Sean $q \in \mathbb{P}$ y $p \in G$ tales que $p \leq q$ como $p \in G$ entonces $d_i \leq p$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $d_i \leq q$ y por lo tanto $q \in G$.

Así, existe un G tal que $G \cap D_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. ■

El teorema fue obtenido de (Ignasi Jané, 2008).

Capítulo 3

Teorema de Ramsey infinito

Usaremos la notación y definiciones de (Ignasi Jané, 2010) para hablar de coloraciones.

Para cualquier conjunto A y cualquier cardinal μ, $[A]^\mu$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A de cardinalidad μ, $[A]^\mu = \{X \subseteq A : |X| = \mu\}$.

Llamamos a cualquier función $H : [A]^\mu \to \lambda$ donde, λ es un cardinal, una partición de $[A]^\mu$ en a lo más λ clases.

Definición 3.1. *Sea $H : [A]^\mu \to \lambda$, decimos que $X \subseteq A$ es homogéneo para H o H-homogéneo, si y solo si, $H|_{[X]^\mu}$ es constante, es decir, para cualquiera $l, k \in [X]^\mu$, $H(l) = H(k)$. Escribiremos $A \to (\alpha)^\mu_\lambda$, para abreviar la siguiente proposición lógica, para toda $H : [A]^\mu \to \lambda$ existe un $X \subseteq A$, $H-$homogéneo, donde α es el tipo de orden de X.*

Si existe un $H : [A]^\mu \to \lambda$ tal que para cada $X \subseteq A$, X no es $H-$homogéneo, con X de tipo de orden α y lo escribimos como $A \not\to (\alpha)^\mu_\lambda$.

Teorema 3.2 (Teorema de casillas infinito)**.** *Para toda $H : [\mathbb{N}]^1 \to m$, con $m \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $H|_{[x]^1}$ es constante.*

Demostración:

Asumamos que no existe un $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $H|_{[x]^1}$ es constante, es decir, para todo $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito $H|_{[x]^1}$ no es constante.

Sea $n \in m$ definimos $X_n \subseteq \mathbb{N}$ como $X_n = \{l \in \mathbb{N} : H(\{l\}) = n\}$ entonces $H|_{[X_n]^1} \equiv n$, por nuestra suposición X_n es finito y por el teorema 2.50, $\bigcup_{n\in m} X_n$ es finito pero $\bigcup_{n\in m} X_n = \mathbb{N}$ lo que es una contradicción. ■

Teorema 3.3. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, supongamos $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_m$ y $Y \subseteq \mathbb{N}$ con $|Y| = |\mathbb{N}|$ entonces $Y \to (\mathbb{N})^n_m$.*

Demostración:

Sean $F : [Y]^n \to \{0, 1, 2, .., m-1\}$ y $Y \subseteq \mathbb{N}$ tal que $|Y| = |\mathbb{N}|$ por lo que existe una función $\phi : \mathbb{N} \to Y$ biyectiva.

Definimos a $H : [\mathbb{N}]^n \to \{0, 1, 2, .., m-1\}$ de la siguiente forma, sea $A' \in [\mathbb{N}]^n$, $H(A') = F(A)$, donde $A = \{\phi(a) \in Y : a \in A'\}$

Por nuestra suposición de $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_m$ existe un $Z \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $H|_{[Z]^n}$ es constante.
Definimos $X = \{\phi(a) : a \in Z\}$, Z es infinito porque ϕ es biyectiva.
Ahora vamos a demostrar que $F|_{[X]^n}$ es constante.
Sea $A_0, A_1 \in [X]^n$ entonces $F(A_0) = H(A'_0)$, $F(A_1) = H(A'_1)$ como $A'_0, A'_1 \in [Z]^n$ y $H|_{[Z]^n}$ es constante entonces $H(A'_1) = H(A'_0)$ y $F(A_1) = F(A_0)$. Por lo tanto $F|_{[X]^n}$ es constante ■ .

Lema 3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ fija, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_m$.*

Demostración
Caso m=1:
Sea $f : [\mathbb{N}]^n \to 1$, luego $f|_{[\mathbb{N}]^n}$ es constante.
Sea $k \in \mathbb{N}$.
Supongamos que $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leqslant m \leqslant k$.
Vamos ahora a demostrar que $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_{k+1}$
Sea $g : [\mathbb{N}]^n \to \{0, 1, 2, ...k\}$ definimos $H : [\mathbb{N}]^n \to \{0, 1\}$ de la siguiente forma, para $A \in [\mathbb{N}]^n$

$$H(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } g(A) \leq k-1 \\ 1 \text{ si } g(A) = k \end{cases}$$

Por hipótesis inductiva, existe un $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $H|_{[X]^n}$ es constante.
Supongamos que $H|_{[X]^n} \equiv 1$ entonces tenemos que $g|_{[X]^n} \equiv k$.
Si $H|_{[X]^n} \equiv 0$, entonces para todo $l \in [X]^n$, $g(l) \leq k-1$ por lo que $g|_{[X]^n} : [X]^n \to k$ por el teorema 3.3 existe un $Y \subseteq X$ tal que $g|_{[Y]^n}$ es constante. ■

Lema 3.5. *Sea $m \in \mathbb{N}$ fija, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_m$.*

Caso n=1.

Sea $f : [\mathbb{N}]^1 \to 2$ nótese que esto caso esta cubierto por el teorema de casillas, por lo tanto $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^1_2$.
Sea $n \in \mathbb{N}$ supongamos que $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^k_m$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Ahora demostraremos el caso n+1. Sea $g : [\mathbb{N}]^{n+1} \to 2$

Supongamos que no existe $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que X es g-homogéneo de color 0. Demostraremos que debe existir un X que es g-homogéneo de color 1.

Construimos a $\mathbb{P} = (P, \leqslant^*)$ donde P tiene elementos de la forma (a, A) donde a es un conjunto finito de naturales, mientras que A es un conjunto infinito de naturales y $a < A$ que denota lo siguiente, $max(a) < min(A)$, y que cumplen $g(x) = 1$ para cualquier $x \in [a]^{n+1}$ y para cada j en el conjunto $\{1, ..., n\}$ y cada $y \in [a]^j$ y para cada $x \in [A]^{n+1-j}$, $g(y \cup x) = 1$.

El orden se define así, dados (a, A) y (b, B) en $\mathbb{P}$ definimos $(b, B) \leqslant^* (a, A)$ si y sólo si a es un segmento inicial de b, es decir, $b \cap max(a) + 1 = a$, $B \subseteq A$ y $a \setminus b \subseteq A$. Ahora vamos a demostrar que $\mathbb{P}$ es un orden parcial.

Vamos a demostrar que $\mathbb{P}$ es un orden parcial.

Demostración:

Primero demostraremos que el conjunto P no es vacío. Observemos que $(\emptyset, \mathbb{N}) \in \mathbb{P}$ por lo que es no vacío.Ahora demostraremos que $\mathbb{P}$ es reflexivo y transitivo. Sean $(a, A) \leqslant^* (b, B)$ y $(b, B) \leqslant^* (c, C)$. Como $(a, A) \leqslant^* (b, B)$, $b \subseteq a$ y $(b, B) \leqslant^* (c, C)$ entonces $b \subseteq c$, por lo tanto $c \subseteq a$. Como $(a, A) \leqslant^* (b, B)$ tenemos que $b \cap max(a) + 1 = b$ como $c \subseteq b$ tenemos que $c \cap max(a + 1) = c$, por lo tanto c es segmento inicial de a.

A partir de $(a, A) \leqslant^* (b, B)$ tenemos que $A \subseteq B$ y $(b, B) \leqslant^* (c, C)$ tenemos que $B \subseteq C$ por lo tanto $A \subseteq B \subseteq C$. Ahora como $(a, A) \leqslant^* (b, B))$ entonces $a \setminus b \subseteq B$ y $(b, B) \leqslant^* (c, C)$ lo cual implica que $b \setminus c \subseteq B$. Ahora $(a \setminus b) \cup (b \setminus c) = (a \setminus c) \subseteq C$ por lo tanto $(a, A) \leqslant^* (c, C)$.

En cuanto a reflexividad es claro que a es segmento inicial de a, $A \subseteq A$ y $(a \setminus a) \subseteq A$ por lo que $\leqslant^*$ es reflexivo.

Ahora vamos a demostrar que dada una condición $(a, A) \in \mathbb{P}$ podemos extenderla, es decir, existe un $m \in A$ y existe un $B \subseteq A$ infinito con $k > m$ para cualquier $k \in B$ tal que $g(\{m\} \cup y) = 1$ para cualquier $y \in [B]^n$. Note que $(b, B) \leqslant (a, A)$ donde $b = a \cup \{m\}$.

Supongamos que para todo $m \in A$ y para cualquier $B \subseteq A$ con $k > m$ si $k \in B$, si para $y \in [B]^n$ $g(\{m\} \cup y) = 1$ entonces B es finito.

Sea $m_0 = \text{mín}(A)$ y $f_{m_0} : [A \setminus \{m_0\}]^n \to 2$ y definimos $f_{m_0}(y) = g(\{m_0\} \cup y)$ entonces existe un $B_1 \subseteq A \setminus \{m_0\}$ infinito tal que $f_{m_0}|_{[B1]^n}$ es la constante 0.

Sea $m_1 = \text{mín}(B_1)$ y definimos $f_{m_1} : [B_1 \setminus \{m_1\}]^n \to 2$ donde $f_{m_1}(y) = g(\{m_1\} \cup y)$, existe un $B_2 \subseteq B_1 \setminus \{m_1\}$ infinito tal que $f_{m_1}|_{[B_2]^n} \equiv 0$. Sea B_j un conjunto tal que $f_{m_j}|_{[B_{j+1}]^n} \equiv 0$. Supóngase que se tiene $B_j \subseteq B_{j-1} \subseteq B_{j-2} ... \subseteq B_0 = A$ tal que $f_{m_j} : [B_j \setminus \{m_j\}]^n \to 2$ donde $m_j = \text{mín}(B_j)$. Ahora definimos $f_{m_{j+1}}(y) = g(\{m_{j+1}\} \cup y)$ por nuestra hipótesis inductiva existe un $B_{j+2} \subseteq B_{j+1} \setminus \{m_{j+1}\}$ infinito tal que $f_{m_{j+1}}|_{[B_{j+1}]^n} \equiv 0$.

Sea $H = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$, demostraremos que $g|_{[H]^{n+1}} \equiv 0$.

Sea $y \in [H]^{n+1}$ donde m_j es el mínimo de y entonces $g(y) = g(\{m_j\} \cup (y \setminus \{m_j\})$ y notemos que $y \setminus \{m_j\} \subseteq B_{j+1}$ y es de tamaño n por lo tanto $y \in [B_{j+1}]^{n+1}$, por la construcción anterior tenemos que $g(y) = 0$ lo que contradice nuestra hipótesis inicial porque H es infinito.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $D_n = \{(a, A) \in \mathbb{P} : |a| \geq n\}$.

Ahora demostraremos que D_n es denso para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primero observemos $D_n \subseteq \mathbb{P}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $(c, C) \in \mathbb{P}$ y sea $|c| = m$ si $m \geq n$ entonces $(c, C) \in D_n$. Si $m < n$ podemos construir una condición tal que $(e_1, E_1) \leq_* (c, C)$ donde $|e_1| = m + 1$, podemos hacer esto por la que podemos extender la condiciones por la parte finita. Ahora podemos extender (e_1, E_1) en la misma forma $(e_2, E_2) \leq^* (e_1, E_1)$ tal que $|e_2| = m + 2$ podemos repetir este proceso $n - m$ veces hasta que tenemos un (e_{n-m}, E_{n-m}) tal que $|e_{n-m}| = n$ por lo que $(e_{n-m}, E_{n-m}) \in D_n$ y $(e_{n-m}, E_{n-m}) \leq^* (c, C)$.

Sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$, como $\mathcal{D}-$generico es una familia numerables de densos existe por el teorema 2.55 un filtro genérico G y definimos $H = \bigcup\{a \in [\mathbb{N}]^{<\mathbb{N}} : (a, A) \in G\}$.

Ahora demostraremos que $H \subseteq \mathbb{N}$ y que H es infinito.

- $H \subseteq \mathbb{N}$

  Para todo $(a, A) \in G$, tenemos $a \subseteq \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i \subseteq \mathbb{N}$.

- H es infinito.

  Asumamos que H es finito, es decir, $|H| = m$ donde $m \in \mathbb{N}$. Como $D_{m+1} \cap G \neq \emptyset$ porque G se un filtro $\mathcal{D}-$genérico entonces existe un $(a', A') \in G$ tal que $|a'| \geq m+1$ pero $a \subseteq H$ y $|a| \geq |H|$ lo cual es una contradicción.

Ahora demostraremos que $g|_{[H]^{n+1}} \equiv 1$
Sea $y \in [H]^{n+1}$, donde $y = \{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\}$ por definición $y_i \in a_i$ para algún $(a_i, A_i) \in G$ y como G es un filtro existe un $(a', A') \in G$ tal que $(a', A') \leq^* (a_i, A_i)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n+1\}$ entonces $y \in [a']^{n+1}$ por lo que $g(y) = 1$. ■

Teorema 3.6 (Teorema de Ramsey). *Para cualquier par* $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_m$.

Este teorema esta demostrado por los Lemas 3.4 y 3.5 y fue demostrado inicialmente por (Ramsey, 2009).

Capítulo 4

Teorema de Ramsey finito

Las siguientes definiciones vienen de (Ignasi Jané, 2008).

Definición 4.1. *Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $\langle T, <^* \rangle$ tal que para cada $x \in T$ el conjunto de los $<^*$-predecesores de x, denotado por $pred_T(x) = \{y : y <^* x\}$ es bien ordenado por $<^*$. Se suele escribir a $\langle T, <^* \rangle$ como T cuando es claro que nos referimos a el árbol. Si $x \in T$, $T - rank$ de x, denotado por $rK_T(x)$ es el tipo de orden de $\{y : y <^* x\}$. La altura de $\langle T, <^* \rangle$, $ht(T)$ es el menor ordinal α tal que ningún elemento en T tiene un $T - rank$ α, es decir,* $\mathrm{ht}(T) = \{\mathrm{rk}_T(x) : x \in T\} = \sup\{\mathrm{rk}_T(x) + 1 : x \in T\}$.

Si $\alpha < \mathrm{ht}(T)$, el α-ésimo nivel de T es el conjunto de todos los elementos de T con $T - rank$ α y lo escribimos como $T_\alpha = \{x \in T : \mathrm{rk}_T(x) = \alpha\}$.

Sea $\langle T, <^* \rangle$ un árbol decimos, L es una rama si $L \subseteq T$ bien ordenado por $<^*$, tal que cualquier par de elementos de esta sean comparables y la longitud de L es su tipo de orden.

Sea $\langle T, <^* \rangle$ un árbol, dado un elemento $s \in T$ decimos que $I(s)$ es el conjunto de los descendientes directos, es decir, para cualquier $x \in I(s)$ no existe un $y \in T$ tal que $y \neq s$, $y \notin I(s)$ y $s <^* y <^* x$.

Teorema 4.2 (Lema infinito de König)**.** *Para cualquier árbol T de altura infinita tal que para todo $r \in \mathbb{N}$, T_r es finito, sobre un conjunto no vacío, existe una rama infinita.*

Demostración:

Sea $\langle T, <^* \rangle$ un árbol de altura infinita, definimos a $T^s = \{t \in T : s <^* t\}$ para todo $s \in T$. Observe que T^s es finito si para cualquier $u \in I(s)$, T^u es finita. Sea A el conjunto de todos los $r \in T$ tal que T^r sea infinito. Sea $s_0 \in T$ tal que para cualquier $r \in T$ tal que $r \neq s_0$ con $s_0 <^* r$ por lo que $T^{s_0} = T/s_0$ además de que $s_0 \in A$ porque s_0 es el menor elemento en $\langle T, <^* \rangle$ y este es de altura es infinita. Sea $s \in A$, entonces T^s es infinito y $I(s)$ es finito, note que $T^s = s \cup \bigcup_{t \in I(s)} T^t$ por lo que existe un T^u infinito para algún $u \in I(s)$, esto implica que $u \in A$, esto quiere decir que para todo $s \in A$ existe un sucesor directo $u \in A$. Por el Principio de elección dependiente existe una secuencia infinita $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ de elementos en A tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, s_{n+1} un sucesor inmediato de s_{n+1}. Note que para $n \in \mathbb{N}$, $rk_T(s_n) = n$. Sea $g = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_n$. Es claro que g es un subconjunto de T y que todos los elementos de g son comparables por lo que g es una rama infinita. ■

Teorema 4.3. *Para todo* $m, k, l \in \mathbb{N}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \to (m)^k_l$.

Demostración:

Sean F y G funciones, decimos que F es una subsecuencia de G si $F \subset G$. Suponga que existen $m, k, l \in \mathbb{N}$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$ $n \not\to (m)^k_l$. Sea T el conjunto de todas las funciones f tales que, para alguna $n \in \mathbb{N}$, $f : [n]^k \to l$ y no existe un conjunto $X-$homogéneo de cardinalidad m. Si $f \in T$, $dom(f) = [n]^k$ y $r < n$, entonces $f|_{[r]^k} \in T$. Sea $\langle T, \subset_T \rangle$ un árbol, donde para cualquier pareja $G, F \in T$, escribimos $G \subset_T F$, si G es una subsecuencia de F. Obsérvese que para cada $h \in T$ y $n < k$, debido a que no existe un subconjunto de n con cardinalidad k, $h = \emptyset$, con base a esto podemos decir que $T_0 = \emptyset$. Si $f \in T_1$, el dominio de f es $[k]^k$, como regla general para $n > k$ si $f \in T_{(n-k)+1}$ entonces su dominio es $[n]^k$. Podemos asumir que $ht(T) = \mathbb{N}$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un número finito de funciones $f : [n]^k \to l$, por lo que cada nivel de T debe ser finito.

Por lo tanto T es un árbol de altura infinita y con niveles finitos, por el lemma de König existe una $B - rama$ infinita. Sea $h = \bigcup B$, observe que $h : [\mathbb{N}]^k \to l$ y para cada restricción $h|_{[s]^k} \in T$ para $s \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Ramsey sabemos que sabemos que existe un conjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ h-homogénea . Sea X el conjunto de todos los primeros m elemento de Y y sea $n > Max(X)$. Sea $g = h|_{[n]^k}$ entonces X es g-homogénea lo que contradice $g \in T$. ■

Capítulo 5

Aplicaciones de los Teoremas de Ramsey finito e infinito

El teorema de Ramsey fundamentalmente enuncia que dado un sistema suficientemente grande, particionado en un número arbitrario de subsistemas, debe existir un subsistema que tenga una propiedad específica. Es debido a esto que el teorema puede ser utilizado en problemas que involucran combinatoria y demostrar teoremas en múltiples campos de las Matemáticas.

5.1. Aplicación el la teoría de grafos

La teoría de grafos estudia las propiedades que emergen de estos, formalmente un grafo es una pareja ordenada (V, E) donde V es un conjunto no vacío de vértices de un grafo y E es conjunto de aristas del grafo está formado por parejas no ordenadas de V. En un sentido práctico podemos considerar E como las conexiones entre los puntos de un grafo. Similarmente, dados dos grafos A y B decimos que B es un subgrafo de A si todos los vértices de B son vértices en A y si todos los aristas de B son aristas en A. Decimos que un clique es un subgrafo tal que todos los vértices del subgrafo están unidos por un artista. Decimos que un grafo es completo si cada par de vértices esta conectado por un arista.

El Teorema de Ramsey enunciado en la teoría de grafos es relativamente simple, existe un grafo completo con $R(l_0, ..., l_m)$ vértices tal que para una partición de aristas en m colores, existan cliques monocromáticos de tamaños $l_0, ..., l_m$ donde $l_0, ..., l_m$ son enteros positivos. Llamamos a $R(l_0, ..., l_m)$ un número de Ramsey y la búsqueda por números de Ramsey es considerada un problema de la teoría de grafos.

El teorema de Ramsey también se ha utilizado para encontrar resultados como el de Goodman, A. W. en su articulo On sets of acquaintances and strangers at any party, donde se encontró una cota inferior para el número de triángulos monocromáticos en una coloración de 2 colores.

5.2. Aplicaciones del Teorema de Ramsey en la teoría de números

La teoría de números es el campo de las matemáticas que estudia las propiedades de los números y de conjuntos de números, generalmente se encuentra enfocado en los números enteros y en una menor escala en los racionales. El teorema de Ramsey ha sido utilizado para demostrar propiedades relacionadas a la combinatoria. Un ejemplo claro de esto es el teorema de Schur, este teorema dice que si se particionan a los naturales en un número finito de clases debe existir al menos un conjunto que contenga una solución para $x + y = z$. También se utilizaron las cotas (Goodman, 1959), para demostrar el caso finito de el teorema de Schur en donde en lugar de usar a los naturales se usan a los primeros n naturales. Esta idea fue luego generalizada a los conjuntos sin suma (sum free sets) donde no existe una solución a la ecuación $x + y = z$ en el conjunto, estas ideas han sido utilizadas para demostrar resultados importantes de la combinatoria aritmética como el teorema de Szemerédi y el teorema de Freiman.

5.3. Aplicaciones a la geometría convexa

La geometría convexa es la rama de la geometría que se dedica al estudio de espacios convexos, decimos que un espacio es convexo si existe un segmento dentro del espacio donde para cualesquiera dos puntos existe una línea que los unen. La geometría convexa es utilizada en muchos campos de la matemáticas como en el análisis funcional real y complejo, además de en las ciencias computacionales, esto se debe a que en estos estudios surgen conjuntos convexos.

Las aplicaciones del teorema de Ramsey en la geometría convexa comenzaron en la década de 1930 cuando Paul Erdős junto con George Szekeres, (Erdös y Szekeres, 1935), demostraron que $2^{n-2} + 1 < g(n) < \binom{2n-4}{n-2} + 1$, donde $g(n)$ denota el menor de número de puntos en posición general en un plano tal que el polígono contenga n puntos en una posición convexa.

En el 1997 Branko Grünbaum, (Grünbaum, Klee, Perles, y Shephard, 1967), generalizó esta idea para R^d y demostró la existencia de un $f(n, d)$ que es un análogo a $g(n)$ y lo hizo utilizando el teorema de Ramsey. El teorema dice así, dado $n > d \geq 2$, $f(n, d)$ es el entero más pequeño tal que cada conjunto formado por al menos $f(n, d)$ puntos en R^d contiene un conjunto convexo de tamaño n.

5.4. Aplicaciones a la complejidad concreta

La teoría de complejidad computacional es un campo de la ciencia computacional dedicado a determinar los recursos utilizados para resolver algún problema computacional. Un problema computacional se define como un problema que puede ser resuelto por algún algoritmo. Definimos a un algoritmo como cualquier proceso que toma una entrada y devuelve una respuesta dentro de una cantidad finita de tiempo. La teoría de complejidad busca cuantificar estos recursos en dos formas, la complejidad de tiempo es la cantidad de tiempo que toma resolver un problema y la complejidad de espacio es la cantidad de memoria que toma resolver un problema. El Teorema de Ramsey ha sido vital para encontrar cotas inferiores para el tiempo que toma resolver un problema en el que se observan estructuras combinatorias.

Análisis de estructuras de datos

En 1981 Andrew Yao escribió *Should Tables Be Sorted?*, el primer artículo donde formalmente se utilizan teoremas de la teoría de Ramsey para encontrar cotas en problemas de ciencias computacionales. El artículo busca responder la siguiente pregunta: ¿cómo se pueden organizar datos de forma tal que puedas verificar de la manera más rápida si la llave j pertenece al conjunto S, dado un conjunto S de n llaves diferentes de un espacio de llaves $M = \{1, 2, ..., m\}$?

Yao muestra con el teorema de Ramsey que dada una tabla ordenada suficientemente grande, entonces $\lceil log_2(n + 1)\rceil$ revisiones son suficientes para responder la pregunta usando búsqueda binaria y que se necesitan al menos $\lceil log_2(n+1)\rceil$ revisiones en el peor caso posible con tablas no ordenadas. Decimos que una tabla es suficientemente grande cuando tiene al menos $r!$ entradas, donde r es el número de Ramsey para conjuntos monocromáticos de tamaño m con r coloraciones.

Aunque es generalmente aceptado que estos resultados no son particularmente útiles, abrieron la puerta para el uso de la teoría de Ramsey en la computación y demostraron que las tablas ordenadas eran la forma más efectiva de verificar $j \in S$.

Problemas de decisión

En 1985 Shlomo Moran (Moran, Snir, y Manber, 1985) buscó aplicar ideas similares para atacar problemas de decisión. Un problema de decisión se define de las siguiente manera, sea S^n las secuencias de tamaño n de un conjunto S totalmente ordenado, dadas dos secuencias $X = (x_1, ..., , x_n)$ y $Y = (y_1, .., , y_n)$ decimos que son equivalentes en orden si para todo $i, j \in \{1, ..., j\}$, $x_i < x_j$ si $y_i < y_j$. Un problema de decisión P es una partición de S^n en clases $P_1, P_2, ...P_q$ y el problema es clasificar la clase a la que pertenece la secuencia. Un árbol de decisión es una serie de preguntas que permite clasificar una entrada, un árbol de decisión binario es un árbol en que clasifica cada pregunta como verdadera o falsa. Para los propósitos de este problema consideramos que cada hoja representa una partición, un árbol es orden invariante si el orden de las preguntas no afecta la respuesta. Con el teorema de Ramsey, Moran demuestra que para todo árbol de decisión con orden invariable que resuelve un problema de decisión $\mathcal{P}$, existe un árbol binario suficientemente grande que también resuelve $\mathcal{P}$ y utiliza este árbol para encontrar una cota inferior.

Cotas para computación de funciones binarias

Una función binaria es cualquier función f que toma como entradas binarias $x_1, ..., x_n$ y devuelve 0 o 1, podemos considerar un árbol de decisiones con solo 2 hojas. Generalmente, el número de niveles en el árbol corresponde a el tiempo de computación, el máximo logaritmo del máximos de nodos por nivel representa el espacio y la dificultad del algoritmo depende de sus vértices. La mayoría de los programas requieren árboles de tamaño exponencial, por lo que es difícil encontrar cotas no lineales, a pesar de esto Pavel Pudlak (Pudlák, 1984) encontró una cota para funciones binarias con el teorema de Ramsey en 1984.

Capítulo 6

Conclusiones

Forcing es una metodologia introducida por Paul Cohen en 1963 para demostrar que la hipotesis del continuo no podia ser demostrada por los axiomas de Zermelo–Fraenkel. Es claro que se pueden usar tecnicas similares a las introducidas por Paul Cohen, pueden ser utilizadas para demostrar teoremas con el uso de ordenes parciales y filtros genéricos.

También podemos concluir que el teorema de Ramsey tiene múltiples aplicaciones, tanto en campos mas teoricos de la matematica como la teoria de grafos y la teoria de numeros, como en campos mas aplicados como la geometria convexa y la teoria de complejidad. En particular la teoría de Ramsey ha sido altamente influyente en la teoria de complejidad para encontrar cotas en tiempos de algoritmos.

Referencias

Erdös, P., y Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio mathematica*, *2*, 463–470.

Goodman, A. W. (1959). On sets of acquaintances and strangers at any party. *The American Mathematical Monthly*, *66*(9), 778–783.

Graham, R. L., Knuth, D. E., y Patashnik, O. (1994). *Concrete mathematics: a foundation for computer science* (2nd ed ed.). Reading, Mass: Addison-Wesley.

Grünbaum, B., Klee, V., Perles, M. A., y Shephard, G. C. (1967). *Convex polytopes* (Vol. 16). Springer.

Ignasi Jané. (2008). *Notas del curso de Teoría de conjuntos combinacional del Departamento de lógica, historia y filosofía de la ciencia de la universidad de Barcelona*.

Ignasi Jané. (2010). *Notas del curso de Teoría de conjuntos basica del Departamento de lógica, historia y filosofía de la ciencia de la universidad de Barcelona*.

Kenneth Kunen. (1983). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs* (Seventh edition ed., Vol. 102). North Holland.

Moran, S., Snir, M., y Manber, U. (1985). Applications of ramsey's theorem to decision tree complexity. *Journal of the ACM (JACM)*, *32*(4), 938–949.

Muñoz Quevedo, J. M. (1983). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Universidad Nacional de Colombia.

Pudlák, P. (1984). A lower bound on complexity of branching programs. En *International symposium on mathematical foundations of computer science* (pp. 480–489).

Ramsey, F. P. (2009). On a problem of formal logic. En *Classic papers in combinatorics* (pp. 1–24). Springer.

Rosta, V. (2004). Ramsey theory applications. *The Electronic Journal of Combinatorics*, *1000*, DS13–Dec.

Takeuti, G., y Zaring, W. (2013). *Introduction to axiomatic set theory*. Springer New York.

Weiss, W. A. (2008). An introduction to set theory. *University of Toronto*, *119*.

Yao, A. C.-C. (1981). Should tables be sorted? *Journal of the ACM (JACM)*, *28*(3), 615–628.