

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍAS

El propósito de este capítulo es presentar las metodologías que se utilizarán para la extensión del Método de Compactación de Imágenes Multifractales utilizado para modelar y simular las gráficas de volatilidad de indicadores financieros, y en particular de la serie de tiempo del IPC en el período de 1994 a 2008. Asimismo abordaremos las metodologías útiles para indagar en la parte estocástica.

Inicialmente presentaremos el método de compactación de imágenes de Barnsley que genera atractores que reproducen gráficas fractales, enunciando también los respectivos teoremas que aseguran la eficiencia del mismo. Posteriormente expondremos las definiciones del movimiento browniano fraccionario, y la idea de generadores multifractales siguiendo los planteamientos de Mandelbrot, y que sirvieron para obtener gráficas multifractales que pasan por una serie de puntos dados (interpolación multifractal) modificando el método de Barnsley. Dichas técnicas fueron presentadas en las tesis citadas en el Capítulo 1.

Continuando con el análisis introduciremos la idea de los procesos estables de Lévy, de las distribuciones de colas pesadas, que han resultado ser las que más aproximan a la distribución de los rendimientos de los activos financieros, esto con el motivo de ligar la parte estocástica a las nuevas metodologías. Y que resultan ser un caso más general de las teorías clásicas, es decir los supuestos de normalidad, que a su vez se fundamentan en la explicación fractal de los mercados, a diferencia del enfoque lineal.

Lo anterior con la idea de aplicar posteriormente las metodologías a la serie de los cierres mensuales del IPC en el período de 1994 a 2008.

3.1 El Método de Compactación de Imágenes de Barnsley

El método de compactación de imágenes se debe a Michael Barnsley y es presentado en su libro *Fractals Everywhere* (2003), y su objetivo es reproducir imágenes de objetos fractales. De acuerdo a Barnsley, al emplearlo se utiliza 10,000 veces menos información que los métodos tradicionales, para algunos conjuntos fractales. Este método produce un atractor que es muy cercano a la imagen dada por la gráfica fractal, y sus fundamentos y el éxito de ésta técnica están dados por el Teorema del Collage el cual también enunciaremos (Romero et al, 2005).

El método consiste en los siguientes pasos:

- 1) Se localizan las partes I_i de la figura que son semejantes a la imagen I que se pretende comprimir.
- 2) Se encuentran las transformaciones afines $W_i : R^2 \rightarrow R^2$

$$W_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

Que cumplan: $W_i(I) = I_i$

- 3) Se asigna una probabilidad p_i a cada transformación W_i de tal manera que los conjuntos mayores tengan una probabilidad mayor, esto se puede hacer de la siguiente manera:

$$p_i = \frac{|a_i d_i - b_i c_i|}{\sum_{i=1}^n |a_i d_i - b_i c_i|}$$

Aquí n es el número de transformaciones afines.

- 4) Se implementa un algoritmo seleccionando un punto (x_0, y_0) de I y se aplican los siguientes pasos:
 - a) Inicializar $x = x_0, y = y_0$.

- b) Para $m = 1$ hasta 3,000 hacer los pasos del (c) al (g).
- c) Elegir k , que será uno de los números $1, 2, 3 \dots n$ con probabilidad p_k .
- d) Aplicar la transformación W_k a (x, y) para obtener (x', y') .
- e) Asignar $(x, y) = (x', y')$.
- f) Si $m > 10$ entonces graficar (x, y) .
- g) Siguiete iteración, es decir hacemos $m = m + 1$. Y regresamos a (a).

Ahora presentaremos el Teorema del Collage enunciado por Barnsley en su libro *Fractals Everywhere* (2003), que es el que asegura el éxito de este método, y que en palabras nos dice que mientras mejor sea descrita la imagen I por la unión de las imágenes afines I_i más cerca será la aproximación a la figura original por el atractor generado con las transformaciones afines. La colección de las transformaciones afines es llamada también sistema iterativo de funciones o IFS por sus siglas en inglés.

Así pues el **Teorema del Collage** dice que cuanto más se aproxime (en la métrica de Hausdorff) la unión $\cup_i W_i(C)$ al conjunto C , mejor será la aproximación, del conjunto obtenido por este método, al conjunto C . Para la formulación exacta de este resultado, inicialmente presentaremos la definición de la métrica de Hausdorff.

Teorema 3.1:

Sea (X, d) un espacio métrico completo, se define:

$$H(X) = \{K \in X \mid K \text{ es compacto y } K \neq \emptyset\}$$

Y sean A y B elementos de $H(X)$, entonces la función h definida por:

$$h(A, B) = \{\text{máx} \{d(a, B) \mid a \in A\}, \text{máx} \{d(b, A) \mid b \in B\}\}$$

Es una métrica y se le llama Métrica de Hausdorff.

Mediante este resultado, tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 3.2: Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces el espacio $H(X, h)$ es completo.

Ahora sí, es tiempo de enunciar la formulación exacta del Teorema del Collage (Barnsley, 1988), que establece lo siguiente:

Teorema 3.3: Sea X un espacio métrico completo y sean $L \in H(X)$ y $\varepsilon > 0$ dados. Si $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ es un sistema iterativo de funciones con factor de contractividad $0 < s < 1$ tal que:

$$h(L, \bigcup_i W_i(L)) \leq \varepsilon$$

Entonces:

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$$

Donde A es el atractor del sistema de funciones iterativo de funciones.

Nota:

- a) El factor de contractividad s es el máximo de las constantes de Lipschitz s_i de las funciones W_i .
- b) El atractor A es el punto fijo de la función W definida por:

$$W(B) = W_1(B) \cup W_2(B) \cup \dots \cup W_n(B).$$

- c) **Conjunto Fractal:** Un elemento $F \in H(X)$ se llama fractal si su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es mayor que su dimensión topológica.

A continuación se explicará el método de compactación de imágenes fractales de Barnsley para el Triángulo de Sierpinski, el cual obtenemos al dividir la figura en el menor número de partes similares al triángulo (Alavez, 2008):

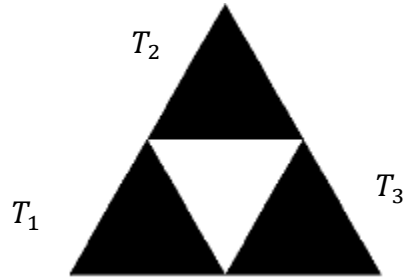


Figura 3.1 Compactación Sierpinski
Fuente: (Alavez, 2008)

1. Se seleccionan las partes T_i del triángulo que son semejantes a la figura total T . Como podemos notar, en el caso del triángulo de Sierpinski $i=3$.
2. Se encuentran las transformaciones afines de la forma:

$$W_i: R^2 \rightarrow R^2:$$

$$W_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}; a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in R$$

Tal que se cumpla $W_i(T) = T_i, i = 1,2,3$.

3. En el caso del triángulo de Sierpinski, el conjunto de los coeficientes de las 3 transformaciones afines contractivas se presenta a continuación, donde a cada transformación se le asocia su respectiva probabilidad.

Código del IFS del Triángulo de Sierpinski

i	a	b	c	d	e	f	p
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Tabla 3.1 Coeficientes IFS Sierpinski
Fuente: (Alavez, 2008)

4. Obteniendo las transformaciones, el siguiente paso es la implementación del algoritmo, el cual después de 10,000 iteraciones grafica la siguiente figura:

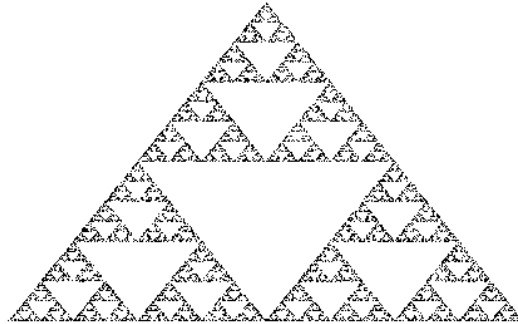


Figura 3.2 Compactación Sierpinski final
Fuente: (Alavez, 2008)

3.2 La Dimensión Fractal

La dimensión fractal a diferencia de la dimensión topológica, está determinada por cómo un objeto llena su propio espacio. Un objeto fractal llena su espacio de una manera dispareja, y además su dimensión es producto de todos los factores que influyen en el sistema que lo produce, debido a su naturaleza compleja. Por lo anterior, la dimensión fractal de una curva provee una manera de medir qué tan rugosa es una curva. En la topología, se considera que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. Sin embargo, puede haber una curva rugosa que recorra una superficie que casi llene la superficie en la que se encuentra. Podemos, entonces, pensar en la rugosidad como un incremento en la dimensión; por lo que una curva rugosa tendría una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tendría entre 2 y 3 (Villazcan y Torres, 2007).

Para calcular la dimensión fractal presentaremos uno de los métodos más sencillos, el de conteo de cajas o *box-counting* en el cual se divide la longitud en n partes, el conjunto

A se particiona por medio de cuadrados cuyos lados miden $1/n$. Sea N el número de cuadrados necesarios para cubrir el conjunto A . Entonces se cumple:

$$N = n^{D_n}$$

Donde la dimensión fractal de A es:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$$

Aunque también es pertinente enunciar el método para encontrar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, que nos ayuda a calcular la dimensión de figuras fractales. Por lo tanto de acuerdo con Peters, esta metodología nos dice que contemos el número N de círculos, de diámetro $2r$, que se necesiten para cubrir la figura, para después sustituirlo en la fórmula siguiente (Peters, 1996):

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{2r} \right)} \right)$$

Donde:

N = Número de círculos.

r = Radio.

D = Dimensión fractal.

La fórmula anterior nos muestra que el número es fraccionario, por lo que la figura es un fractal, y nos ayuda a calcular la dimensión de fractales aleatorios. En el caso de curvas con auto-similitud perfecta, es decir, fractales determinísticos, la fórmula se simplifica a la siguiente:

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{2r} \right)}$$

Lo anterior también se puede ver como el número N de cuadrados con los que se puede cubrir la figura, tomado a r como el tamaño de los cuadrados, y concordando de cierta manera con el método de conteo de cajas. Si el límite existe (o en la forma simple la división) y es mayor que la dimensión topológica de la figura, entonces estamos tratando con una figura fractal.

Un enfoque alternativo para calcular la dimensión fractal de un sistema iterativo de funciones se expondrá en la sección 3.6, donde también se explica el funcionamiento de este tipo de sistemas, y que será utilizado para la modelación de la volatilidad de la serie de tiempo mensual del IPC en el período de 1994 a 2008.

3.3 Auto-afinidad Estadística

La auto-afinidad estadística nos ayudará para describir los procesos que presentan características fractales, al ser ésta propiedad equivalente a la auto-similitud característica de los grafos fractales. Por lo tanto y de acuerdo con el artículo presentado por Jesús Muñoz de la Universidad de Sevilla en 2005, un proceso estocástico auto-afín es un proceso en el que al cambiar la escala temporal se obtiene un proceso cuyas distribuciones finito-dimensionales sólo difieren de las del proceso original en la escala espacial (Muñoz, 2005):

Definición 3.1: Un proceso estocástico $\{X(t): t \in T\}$ que comienza en el origen (casi seguro) es un **proceso auto-afín** si:

$$\forall a > 0 \exists b > 0 \text{ tal que } \{X(at)\} \cong \{bX(t)\} \forall t : t, at \in T$$

En todo lo que sigue supondremos, para eliminar los procesos que no son más que una tendencia, que el proceso es no trivial y, por razones técnicas, que el proceso es

estocásticamente continuo, en t para todo $t \in T$. Bajo estas hipótesis, el cambio de escala espacial a , y el cambio de escala temporal b , verifican una relación de tipo exponencial, $b = a^H$ (Lamperti, 1962):

Teorema 3.4: Sea $\{X(t): t \in T\}$ un proceso estocástico autoafín que comienza en el origen (casi seguro), no trivial y estocásticamente continuo (en $t \forall t \in T$).

Existe un único $H > 0$, que recibe el nombre de **exponente de auto-afinidad** del proceso, tal que:

$$\forall a > 0 \{X(at)\} \cong \{a^H X(t)\} \forall t : t, at \in T$$

Para hacer explícito el valor de H , diremos que el proceso es H -auto-afín. “En una función auto-afín, en la cual la auto-afinidad es determinística, al cambiar la escala temporal se obtiene una función que sólo difiere de la original en la escala espacial y cuyo grafo es el mismo. Sin embargo, al cambiar la escala temporal en un proceso auto-afín, en el cual la auto-afinidad es estadística, aunque el proceso sólo difiere del original en la escala espacial, los grafos son distintos, es decir tienen el mismo aspecto en un sentido estadístico ya que los incrementos siguen la misma distribución” (Muñoz, 2005).

Lo anterior nos servirá para caracterizar la serie de tiempo mensual del IPC para el período de 1994 a 2008, ya que como veremos en el capítulo siguiente, presenta las características de auto-afinidad estadística. Por lo que la serie podrá ser representada por los procesos auto-afines, y éstos le darán su caracterización fractal.

3.4 El Movimiento Browniano Fraccionario

El movimiento browniano, caracterizado por la independencia y la normalidad de la distribución de sus incrementos, es uno de los modelos más utilizados para describir el

precio de los instrumentos financieros. Asimismo como presentamos en el capítulo anterior, la Teoría de los Mercados Eficientes está sustentada en estas hipótesis.

Sin embargo, en los años sesenta, una vez más Benoît B. Mandelbrot, a quien hemos introducido anteriormente como el padre de la Geometría Fractal, propuso dos generalizaciones del movimiento browniano para modelar la evolución de los precios de un activo financiero, específicamente en su trabajo lo hizo con los precios del algodón (Mandelbrot, 1982), y fueron: los movimientos brownianos fraccionarios y los movimientos L-estables o también llamados procesos estables de Pareto-Lévy. Los procesos anteriores, a pesar de que tienen diferencias esenciales, presentan en sus grafos dos características típicas de los conjuntos fractales, que nos van a permitir estudiarlos de forma conjunta: la auto-afinidad estadística, y el valor no entero de su dimensión. Lo anterior para ser coherentes con la explicación fractal de los mercados financieros, en contraste con el enfoque lineal.

En esta sección nos ocuparemos de los movimientos brownianos fraccionarios. El movimiento browniano fraccionario es la generalización del movimiento browniano obtenida cuando suprimimos la independencia de sus incrementos y mantenemos la normalidad de la distribución que siguen, de forma que la varianza en vez de ser proporcional al incremento temporal h , lo es a una potencia suya h^{2H} , donde el exponente H , $0 < H < 1$, recibe el nombre de índice del proceso (Muñoz, 2005).

Definición 3.2: Un **movimiento browniano fraccionario** de índice H , $0 < H < 1$, es un proceso estocástico $\{B_H(t): t \geq 0\}$ en algún espacio de probabilidad, tal que:

- i. El proceso comienza en el origen, es decir, con probabilidad 1, $B_H(t)$ es continuo y $B_H(0) = 0$.

ii. $\forall t > 0, \forall h > 0$ el incremento $B_H(t+h) - B_H(t)$ se distribuye $N(0, \sigma^2 h^{2H})$.

Para $\sigma^2 = 1$ diremos que es un movimiento browniano fraccionario estándar.

Cuando el índice del proceso toma el valor de $\frac{1}{2}$ el proceso coincide con el movimiento browniano clásico, único caso con incrementos independientes. En el resto de los casos, los incrementos son dependientes y según el tipo de dependencia se clasifican en:

- **Movimientos brownianos fraccionarios persistentes:** $\frac{1}{2} < H < 1$, en los cuales los incrementos correspondientes a los intervalos $[0, t]$ y $[t, t+h]$ tienden a ser del mismo signo, con lo que, si ha crecido en un intervalo, tiende a aumentar en el siguiente, o a disminuir si ha decrecido en el otro.
- **Movimientos brownianos fraccionarios anti-persistentes:** $0 < H < \frac{1}{2}$, en los cuales los incrementos correspondientes a los intervalos $[0, t]$ y $[t, t+h]$ tienden a ser de distinto signo, con lo que, si ha crecido en un intervalo tiende a disminuir en el siguiente, o a aumentar si ha decrecido en el otro.

Ahora tenemos que de acuerdo al artículo publicado por Jesús Muñoz de la Universidad de Sevilla en 2005, la característica fractal de invariancia de la distribución bajo un cambio adecuado de escala en el tiempo y el espacio, generaliza el resultado obtenido por el movimiento browniano clásico (al ser el fraccionario un proceso auto-afín), y por lo tanto estas alternativas resultan ser una generalización de las teorías existentes, convirtiéndose así en la evidente evolución en el entendimiento de los mercados financieros.

Lo anterior se formaliza de la siguiente manera: sea $\{B_H(t): t \geq 0\}$ un movimiento browniano fraccionario de índice H , $0 < H < 1$ y $a > 0$.

$$B_H(at) \cong a^H B_H(t)$$

Es decir, el movimiento browniano fraccionario es un proceso auto-afín cuyo exponente de auto-afinidad coincide con el índice del proceso H (Muñoz, 2005).

En un proceso cuyas distribuciones finito-dimensionales son normales, proceso gaussiano, las esperanzas y varianzas siempre son finitas y las distribuciones finito-dimensionales sólo dependen de las medias, varianzas y covarianzas. Como un proceso H -auto-afín gaussiano con $0 < H < 1$ queda determinado, salvo escala, por su exponente de auto-afinidad, un proceso H -auto-afín gaussiano con incrementos estacionarios tiene que ser un movimiento browniano fraccionario de índice H cuya varianza es proporcional al incremento temporal, movimiento browniano clásico, o a una potencia suya, movimiento browniano fraccionario (Muñoz, 2005).

Otra característica fractal que el movimiento browniano fraccionario comparte con el clásico es la dimensión no entera de su gráfica, dado que siendo $\{B_H(t): t \geq 0\}$ un movimiento browniano fraccionario de índice H . La gráfica en el intervalo $[0, 1]$, casi seguro, tiene dimensión fractal por medio del método box-counting de $D = 2 - H$ ($1 < D < 2$) (Falconer, 1990). En estos procesos el índice H es conocido como el exponente de Hurst (Peters, 1996).

Debido a lo anterior el movimiento browniano fraccionario presenta características fractales en cuanto a su dimensión, su auto-similitud y su complejidad.

3.5 Los Procesos Estables de Lévy

Mandelbrot fue uno de los primero en descubrir que los rendimientos siguen una distribución estable de Lévy. Los procesos estables de Lévy son estocásticos y obedecen al teorema generalizado del límite central, y son más bien una generalización de la forma

normal. En esta sección nos enfocaremos al estudio de esos procesos, que nos servirán posteriormente para ahondar en la explicación estocástica de la serie del IPC.

Definición 3.3: Un proceso estocástico real, que comienza en el origen casi seguro y es estocásticamente continuo en $t, \forall t \in T$, es un **proceso de Lévy** si:

- Tiene incrementos estacionarios.
- Tiene incrementos independientes.

Las distribuciones estables, que son una generalización de la normal son las únicas posibles en los procesos de Lévy, que presenta la característica fractal de auto-afinidad estadística (Muñoz, 2005):

Teorema 3.5: Sea $\{X_t, t \in T\}$ un proceso de Lévy no trivial. $\{X_t\}$ es H-autoafín si y sólo si $\{X_t\}$ es estrictamente α -estable, en este caso $H = 1/\alpha$ (Embrechts y Maejima 2000).

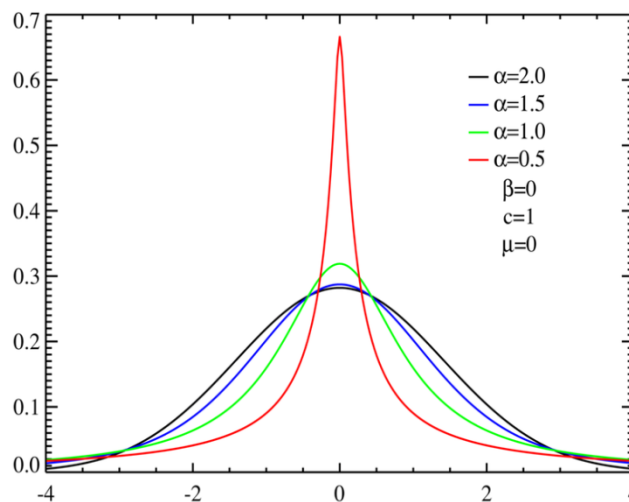


Figura 3.3 Distribuciones Estables
Fuente: Wikipedia

Las distribuciones estables con esperanza finita están comprendidas entre la distribución normal ($\alpha=2$), que tiene esperanza y varianza finita, y la distribución de Cauchy ($\alpha=1$), cuya esperanza y varianza son infinitas. Como este teorema hace que las distribuciones estables sean las únicas posibles en los procesos auto-afines con incrementos

independientes, el movimiento L-estable o proceso estable de Pareto-Lévy que veremos posteriormente es el único proceso auto-afín con incrementos independientes que puede generalizar al movimiento browniano (Muñoz, 2005).

Como las distribuciones estables son las únicas posibles en los procesos auto-afines con incrementos independientes y estacionarios, el movimiento L-estable es el único proceso con características auto-afines que puede generalizar al movimiento browniano. Este proceso se obtiene al considerar que sus incrementos siguen una distribución estable con exponente característico α , $0 < \alpha \leq 2$, en lugar de una distribución normal que es estable con $\alpha = 2$ (como se considera que no tiene tendencia, el parámetro de localización, μ , que en la distribución normal es la media, se toma como cero) (Muñoz, 2005):

Definición 3.4: Un **movimiento L-estable** o **proceso estable de Pareto-Lévy** es un proceso estocástico $\{L_{\alpha,\beta}(t): t \geq 0\}$ que comienza en el origen (casi seguro) y que cumple con:

- El proceso tiene incrementos independientes.
- $\forall t > 0, \forall h > 0$ el incremento $L_{\alpha,\beta}(t+h) - L_{\alpha,\beta}(t)$ se distribuye $S_{\alpha,\beta}(0, \gamma h)$.

El parámetro de escala de la distribución γ , va a establecer la proporcionalidad de los incrementos del movimiento L-estable con el incremento temporal, análogamente al movimiento browniano clásico, único caso con varianza finita ($\alpha=2$), donde con la sustitución $\gamma = \sigma^2/2$, la distribución de los incrementos es normal con media cero y varianza $\sigma^2 h$. El exponente característico del proceso coincide con el exponente característico de la distribución α , y por tanto, en un movimiento L-estable no browniano $\alpha < 2$ y la varianza será infinita. Además, como este exponente también determina el

tamaño de las colas, las colas de un movimiento L-estable no browniano $\alpha < 2$, serán mayores que en el movimiento browniano, $\alpha = 2$ (Muñoz, 2005).

Como los incrementos del proceso están idénticamente distribuidos y sólo dependen del incremento temporal, los incrementos del proceso son estacionarios y, al comenzar en el origen, se tiene:

$$L_{\alpha,\beta}(t) \sim S_{\alpha,\beta}(0, \gamma t), \forall t \geq 0$$

Como dentro de los procesos de Lévy auto-afines la distribución tiene que ser estrictamente estable y cuando α es igual a uno la distribución es estrictamente estable sólo si es simétrica, vamos a imponer que en este caso lo sea (si el exponente característico de la distribución es distinto de uno siempre es estrictamente estable, ya que el parámetro de localización, μ , es cero):

Entonces tenemos lo siguiente, sea $\{L_{\alpha,\beta}(t): t \geq 0\}$ un movimiento L-estable con exponente característico α , simétrico para $\alpha = 1$, y $a > 0$:

$$L_{\alpha,\beta}(t) \cong a^{-1/\alpha} L_{\alpha,\beta}(at)$$

Es decir, el proceso es auto-afín con exponente de auto-afinidad $H = 1/\alpha$.

La dimensión de los registros temporales del movimiento L-estable nos interesa en el caso $1 < \alpha \leq 2$, donde el proceso tiene esperanza finita, ya que en el caso $0 < \alpha \leq 1$, donde la esperanza es infinita, esta gráfica tiene dimensión uno (Falconer, 1990):

Por lo tanto, sea $\{L_t(t)\}$ un movimiento L-estable con esperanza finita, $1 < \alpha \leq 2$: La gráfica en el intervalo $[0,1]$, casi seguro, tiene dimensión $D = 2 - 1/\alpha = 2 - H$, con H el exponente de auto-afinidad del proceso. Demostrando de la misma manera que con el movimiento browniano fraccionario, el comportamiento y las características fractales de auto-similitud, dimensión y complejidad.

Las proposiciones anteriores presentados por Jesús Muñoz de la Universidad de Sevilla en 2005 y aplicadas a la serie de los logaritmos de los cierres diarios del índice IBEX35 durante la década de los noventa (que es el equivalente español del IPC mexicano), nos presentan resultados en cuanto a la generalización del movimiento browniano, combinándolo con un movimiento L-estable y un movimiento browniano fraccionario. Demostrando así la generalización de la normalidad en la distribución de los rendimientos de los activos financieros, de acuerdo a los comportamientos fractales y, con todo lo que esto implica.

Nuestro propósito en los siguientes capítulos, será el aplicar las metodologías anteriores al caso mexicano, analizando la serie de tiempo de los cierres mensuales del IPC en el período de 1994 a 2008.

3.6 Generadores Multifractales

En una publicación titulada: “*A Multifractal Walk Down Wall Street*” publicada en la revista *Scientific American* en 1999, una vez más el protagonista de nuestra historia fractal, Mandelbrot, presentó una idea para la modelación de la volatilidad y las gráficas de los rendimientos de instrumentos financieros a través de los Multifractales.

En base a esta idea introducida por Mandelbrot, los trabajos presentados en las Tesis citadas en el Capítulo 1, lograron la formulación de un algoritmo para inicialmente, simular la volatilidad de las graficas de los instrumentos financieros y posteriormente implementar la modelación de las gráficas de los rendimientos y la volatilidad del IPC y las acciones de Telmex, todo esto mediante una modificación de los métodos de interpolación fractal

enunciados por Barnsley. Y para lo cual, la aportación del presente trabajo en esta línea de investigación consistirá en la extensión de estas metodologías.

Es por lo anterior que en esta sección nos enfocaremos en presentar dichas técnicas, tal y como fueron establecidas en las Tesis enunciadas anteriormente, elaboradas en la Universidad de las Américas, Puebla, bajo la dirección del Dr. Guillermo Romero.

Inicialmente presentaremos el método de interpolación fractal de Barnsley: Sea un conjunto de datos un conjunto de puntos de la forma $\{(x_i, F_i) \in R^2: i = 0, 1, 2, \dots, N\}$, donde $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Una función de interpolación correspondiente a este conjunto de datos es una función continua $f: [x_0, x_N] \rightarrow R$ tal que $f(x_i) = F_i$, para $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Los puntos $(x_i, F_i) \in R^2$ son los puntos de interpolación, por lo que decimos que f interpola la información y que la gráfica de f pasa a través de los puntos de interpolación (Barnsley, 211).

Ahora consideremos un conjunto de datos dados de la forma $\{(x_i, F_i) \in R^2: i = 0, 1, 2, \dots, N\}$, debemos construir un IFS en R^2 tal que su atractor G , sea la gráfica de una función continua $f: [x_0, x_N] \rightarrow R$ que interpola los datos. Por lo tanto, el primer paso es encontrar un IFS de la forma $\{R^2, w_n, n = 1, 2, \dots, N\}$ cuyas transformaciones afines cumplan con la siguiente estructura:

$$w_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}; a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n \in R$$

En una transformación afín de este tipo, el vector $\begin{pmatrix} b_n \\ d_n \end{pmatrix}$ describe el cambio de rotación y escala vertical. El parámetro $b_n = 0$ nos indica que no existe rotación en el eje sino sólo contracción. Dichas transformaciones deberán cumplir las siguientes restricciones:

$$w_n \begin{pmatrix} x_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$w_n \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}$$

Sea $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, sustituyendo la forma general de las transformaciones w_n tenemos un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$a_n x_0 + e_n = x_{n-1}, \quad (A)$$

$$a_n x_N + e_n = x_n,$$

$$c_n x_0 + d_n F_0 + f_n = F_{n-1},$$

$$c_n x_N + d_n F_N + f_n = F_n.$$

Sea L un segmento de línea paralelo al eje de las ordenadas, entonces $w_n(L)$ es a su vez, un segmento paralelo al eje de las ordenadas y d_n representa el factor de escala vertical, y al dejarlo como parámetro libre para que nosotros decidamos su valor, estamos permitiendo especificar la escala vertical producida por la transformación afín.

Dado el sistema de ecuaciones generado por las transformaciones afines (A), éste se resuelve para obtener cada uno de los coeficientes $a_n, c_n, e_n, f_n \in R$. Por lo tanto, dichos coeficientes quedan determinados de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} \quad (1)$$

$$e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \quad (2)$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - \frac{d_n (F_N - F_0)}{x_N - x_0} \quad (3)$$

$$f_n = \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} - d_n \frac{x_N F_0 - x_0 F_N}{x_N - x_0} \quad (4)$$

El coeficiente d_n en una transformación w_n se obtiene de la razón que existe entre la altura de cada caja n y la altura total en la que se encuentra comprendida la grafica.

Al analizar el conjunto de restricciones impuestas a las transformaciones afines, notaremos que cada segmento será similar a la gráfica total, debido a que cada una de las w_n garantizarán que la gráfica total se reproduzca en cada segmento al mandar el punto inicial $(x_0, F_0) \rightarrow (x_{n-1}, F_{n-1})$ y el punto final lo manda $(x_N, F_N) \rightarrow (x_n, F_n)$.

Gráficamente:

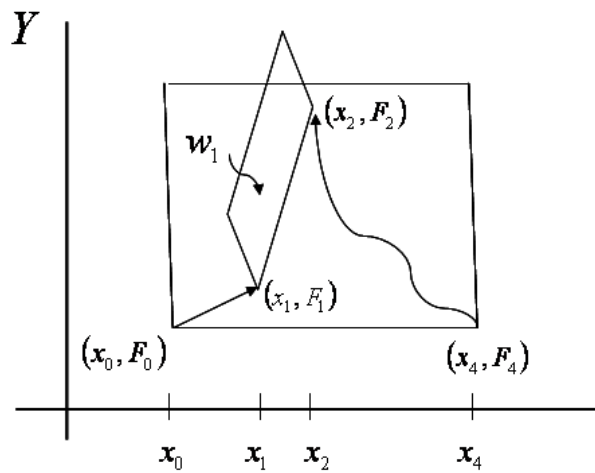


Figura 3.4 Interpolación Fractal

Fuente: (Barnsley, 1988)

De acuerdo con Barnsley, la teoría de interpolación fractal nos brinda un método para calcular la dimensión fractal de los atractores que produce, el cual se presenta a continuación:

Los factores de escala vertical d_n cumplen $0 \leq d_n < 1$ y los coeficientes constantes a_n, c_n, e_n, f_n están dadas por las ecuaciones (1)-(4) para $n=1,2,\dots, N$. Sea G el atractor del IFS, de tal manera que G es la gráfica de la función de interpolación fractal asociada a los datos. Si $\sum_{n=1}^N |d_n| > 1$ y los puntos de interpolación no están sobre una línea recta, entonces la dimensión fractal de G está dada por la solución real única de:

$$\sum_{n=1}^N |d_n| a_n^{D-1} = 1$$

De lo contrario, la dimensión fractal de G es uno.

La condición $\sum_{n=1}^N |d_n| > 1$ implica que la suma de las alturas de las cajas que cubren la figura deberá exceder a la altura total de la gráfica. Esto nos sugiere que para que un IFS tenga dimensión fractal, requerimos que no todos los puntos de interpolación estén sobre una sola línea recta, ya que si esto pasara, los factores de escala vertical serían cero sin excepción.

Mediante la aplicación de los resultados anteriores, presentados en la Tesis de "Modelación de la Volatilidad por medio de Multifractales: IPC y Telmex", de Martha Elías Villazcan y Samuel Torres Ortiz (2007), egresados de la Licenciatura en Economía y Matemáticas de la UDLA, y que basaron sus aplicaciones a su vez en la Tesis de "Modelación de la Volatilidad por medio de Multifractales" de Isabel Treviño (2006), ambos trabajos bajo la dirección del Dr. Guillermo Romero. Los autores lograron generar atractores unifractales que permitieron reproducir las gráficas de los rendimientos del IPC y Telmex con el fin de modelar su volatilidad:

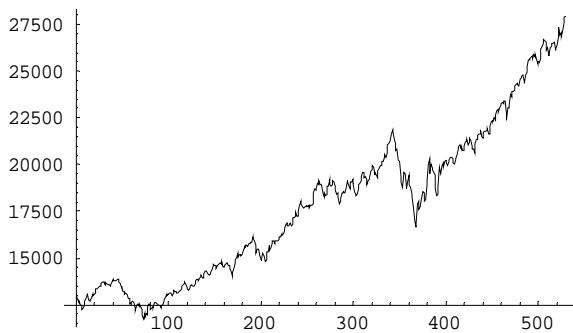


Figura 3.5 Gráfica del IPC
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

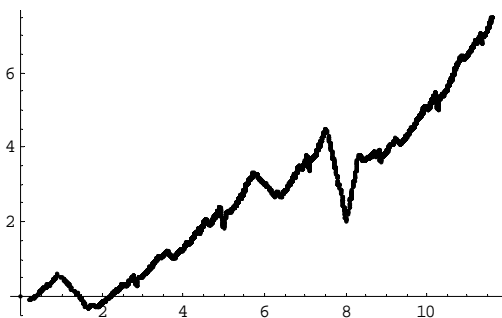


Figura 3.6 Atractor fractal generado IPC
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

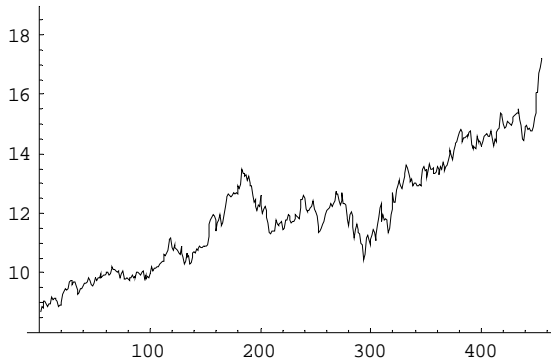


Figura 3.7 Gráfica de Telmex
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

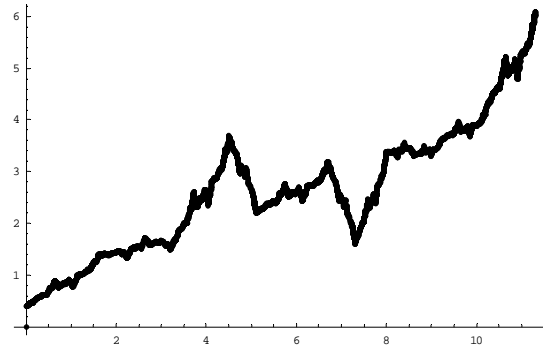


Figura 3.8 Atractor fractal generado Telmex
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

Como podemos observar en los resultados anteriores, las curvas unifractales generadas, aproximan de una muy buena forma a las gráficas originales de los instrumentos financieros seleccionados. Sin embargo aún presentan una actividad moderada, en cuanto a su aleatoriedad. “Por lo que la interpolación fractal no permite modelar gráficas económicas que presentan un comportamiento más agresivo o salvaje típico en gráficas de mercados financieros debido a su volatilidad” (Villazcan y Torres, 2007).

Razón por la cual Mandelbrot en su artículo publicado en *Scientific American*, introduce la idea de la interpolación Multifractal, que fue comprobada en la Tesis de Isabel Treviño, y que indica que para agregar una mayor variabilidad al atractor generado, es decir un mayor nivel de aleatoriedad, es necesario que “cada etapa de interpolación sea precedida por un “barajeo” aleatorio, en el que se permita interpolar con el generador o con partes del mismo. Así fue como el trabajo teórico de Isabel Treviño logró por medio de un algoritmo aumentar la aleatoriedad en el proceso de interpolación introduciendo nuevas transformaciones y así, permitió mediante un “barajeo” aleatorio interpolar todo el generador o una parte de él” (Villazcan y Torres, 2007).

Las transformaciones utilizadas fueron las siguientes (Villazcan y Torres, 2007):

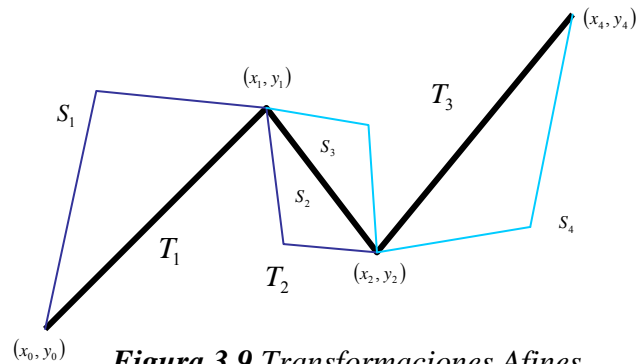


Figura 3.9 Transformaciones Afines
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

Mediante la aplicación de las ideas anteriores, Villazcan y Torres, los autores del trabajo siguiente al de Treviño, lograron la modelación e implementación de un algoritmo que permitió generar atractores Multifractales que describieran las gráficas del IPC y de las acciones de Telmex, esto utilizando las transformaciones siguientes:

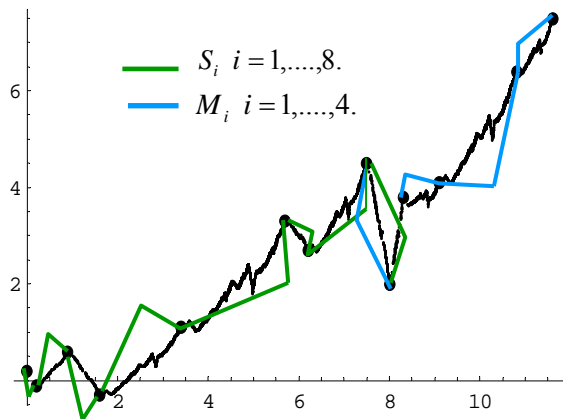


Figura 3.10 Gráfica del IPC
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

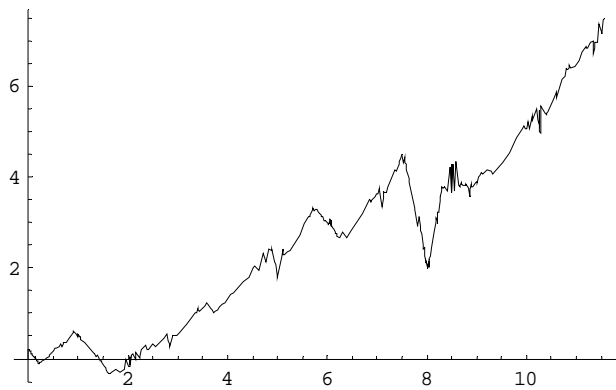


Figura 3.11 Atractor multifractal generado IPC
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

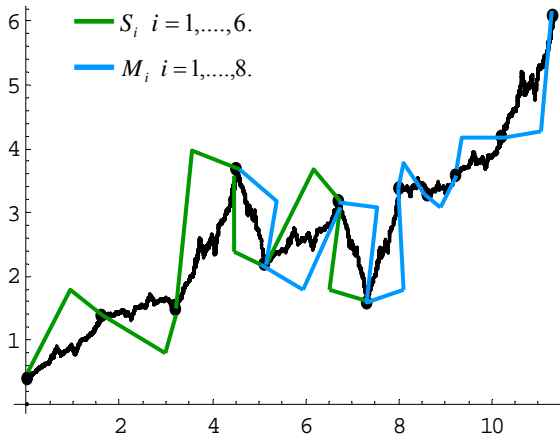


Figura 3.12 Gráfica de Telmex
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

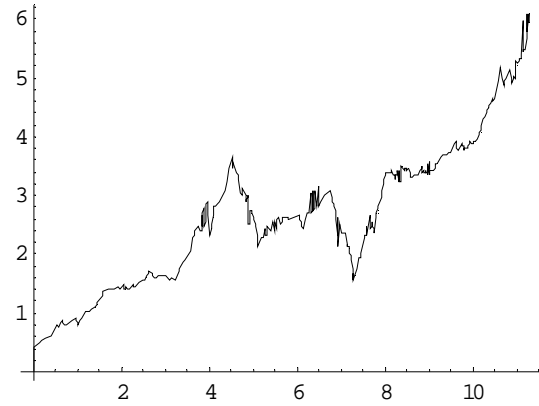


Figura 3.13 Atrector multifractal generado Telmex
Fuente: (Villazcan y Torres, 2007)

Como podemos observar ahora en los resultados, los atractores Multifractales generados presentan un mayor grado de aleatoriedad, es decir son más sensibles a las variaciones y las reproducen mejor, esto debido al incremento de las transformaciones utilizadas en cada segmento, que a su vez incrementaron el número de combinaciones elegibles en cada iteración, agregando así aleatoriedad al sistema.

El presente trabajo pretende lograr la extensión de las metodologías anteriores, motivo por el cual fueron presentadas. Siendo así los fractales y la modelación a través de los Multifractales, la mejor alternativa para representar la volatilidad de los mercados financieros y alejarnos de los supuestos de linealidad, con el fin de empezar a comprender una naturaleza que es inherentemente caótica y compleja.