

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordarán los principales temas que darán fundamento a nuestra investigación, siendo estos esenciales para la total comprensión de las metodologías y los resultados. Tal vez toda gran teoría debería de empezar con una metáfora y terminar con una ecuación matemática.

Así pues iniciaremos con los conceptos de riesgo y volatilidad, sus bases y fundamentos en la naturaleza humana y su afán por predecirlos; pasando así a la formación y constitución de las estructuras económicas con las que ahora contamos, deteniéndonos particularmente en los mercados financieros y en los supuestos que hay detrás de ellos, abordado de esta manera las principales y clásicas técnicas que los modelan, al mismo tiempo que pondremos en evidencia (en base a otros autores), la necesidad de nuevas herramientas de predicción, las cuales encontraremos en la teoría fractal, para la cual enunciaremos la teoría del caos, y a su vez la teoría de la complejidad, para el mejor entendimiento de la misma.

2.1 El Riesgo

Si pretendemos extender una modelación del riesgo, primero tenemos que entender este concepto, su naturaleza, su historia, su concepción en la mente humana, y su actual evolución. Para ello nos remontamos a la época de los antiguos griegos, sin duda alguna una de las culturas madre de nuestro mundo occidental.

Es casi impensable que esta gran civilización del mundo antiguo, con todos sus avances científicos y filosóficos, jamás se haya detenido a tratar de predecir o pronosticar

el futuro, o que nunca se preocupara por recabar información del pasado para tratar de proyectarlo; sin embargo como en toda gran historia, muchas de las respuestas están en la misma pregunta. Por lo tanto, en esta ocasión caemos en la cuenta de que para ellos dicha pregunta ni siquiera existió. Para los griegos el destino de los hombres y por lo tanto el futuro mismo era de incumbencia única de los dioses, ellos eran los que a sus antojos decidían el destino de las naciones o de los individuos, incluso destaca la amplia veneración y consulta a los oráculos para conocer el porvenir (Bernstein, 1996).

Esto nos lleva a preguntarnos en cómo nos convertimos en los “expertos” tomadores de decisiones que ahora somos, si no contábamos con las herramientas necesarias, o ¿cuáles son esas herramientas?

Invariablemente esto nos conduce unos cuantos años en la línea del tiempo y nos sitúa en los orígenes de la teoría de la probabilidad, la formalización matemática del concepto de Riesgo (Bernstein, 1996). Curiosamente los inicios de esta teoría se basan en la racionalización de los juegos de azar, para posteriormente convertirse en la parte fundamental de la teoría actual de decisiones, y parte central de nuestros análisis de volatilidad. Una teoría relativamente nueva que encontró fundamentos y bases en el trabajo recopilatorio y original de Laplace en el año de 1812 (Coles, 2006).

En el desarrollo de esta teoría grandes avances y contribuciones han dejado huella, sin embargo destaca uno de ellos, la distribución normal, o la llamada campana de Gauss, y con ella el teorema del límite central. Conceptos bajo los cuáles se ha fundamentado la teoría de los mercados financieros eficientes, y que han servido de base para muchas predicciones y teorías subyacentes, aunque la pregunta que ahora nos deja es: ¿La realidad se comporta de una manera normal?

Sin duda el entendimiento de las teorías de la probabilidad, su generalización y fundamentación en el análisis matemático y en la teoría de la medida, nos ha permitido comprender de una manera mejor al riesgo, e incluso modelarlo como un proceso estocástico, a través de la teoría de las martingalas, filtraciones, caminatas aleatorias y movimientos brownianos. Pero al mismo tiempo parece que los supuestos de normalidad no nos dan aproximaciones tan certeras a este riesgo, por lo cual en los últimos años, los investigadores han buscado caminos alternativos, novedosos y prometedores, como son la teoría del caos y una de sus más sorprendentes ramificaciones, los fractales. Entrando así a un mundo en donde dejamos de ver a la realidad como lineal y prescindimos un poco de los supuestos de normalidad, para así adentrarnos en el caos y la no linealidad, con el fin de modelar de una mejor manera, la complejidad de un mundo en el que el caos y el orden conviven.

Hasta ahora nos hemos enfocado en dar un panorama general de cómo ha sido modelado el riesgo, aunque hemos evadido un poco su definición y significado. La palabra riesgo proviene del vocablo italiano *risicare*, que significa atreverse; en este sentido el riesgo más allá de ser obra del destino, tiene que ver más con las decisiones humanas, las acciones que tomamos que dependen en qué tan libres somos para tomarlas, es de lo que realmente trata el riesgo (Bernstein, 1996).

Por lo tanto, el riesgo no es algo que deba ser visto o confundido por la fe o el destino, es sólo nuestra visión de cómo nosotros, simples mortales entendemos que la incertidumbre está presente, y como la modelamos; la fe y el futuro incierto van más allá de esto y están fuera del alcance de esta tesis, por lo que nos centraremos principalmente en entender, ésa parte de nuestras vidas, que nos concierne tanto y que nos crea tanta incertidumbre, pero que es producto de nuestras decisiones: el Riesgo.

2.2 La Volatilidad

En esta concepción del riesgo, los avances en la teoría de la probabilidad y la predicción en los mercados financieros, basados en los supuestos de normalidad, nos brindaron una variable que ha sido la mejor candidata para medir el riesgo, al menos en las teorías económicas clásicas: La desviación estándar.

A través de los cursos en la carrera de Actuaría, se aprende que la desviación estándar es una medida de dispersión de los datos que nos indica qué tanto en promedio se alejan los datos de la media. Es decir qué tanta variabilidad hay en las observaciones.

Esta definición ha sido aceptada tradicionalmente para medir la volatilidad de los activos financieros; que no es más que tratar de calcular la dispersión o la variabilidad de los instrumentos en un periodo de tiempo determinado, usualmente útil sólo a corto plazo. Sin embargo evidencias empíricas y nuevos avances en su estudio indican que debemos de cambiar el paradigma de linealidad, pues los rendimientos de los activos financieros no parecen comportarse de manera normal (no tienen una distribución normal), presentan mayor grado de kurtosis, es decir, colas más pesadas (Peters, 1996), su distribución es más bien cercana a la familia de distribuciones estables de Pareto, o de colas pesadas de Lévy (Mandelbrot, 1999). Siendo los últimos avances en el área, los presentados por Engle (1982) con su modelo ARCH (modelos de heteroscedasticidad autorregresiva condicional, por sus siglas en inglés) y que fueron galardonados con el Nobel en Economía en el 2003.

Dichos modelos y nuevas teorías ven a la volatilidad como condicional de su estado previo, en contraste con las teorías clásicas. Y han generado desde su planteamiento nuevas líneas de investigación que cada vez más concuerdan en que la desviación estándar como medida de la volatilidad, no es una medida estándar, o al menos en el corto plazo. Y que

también son consistentes con los planteamientos de Mandelbrot al presentar distribuciones de colas pesadas.

Muchos de estos avances han sido simplificados, y hasta cierto punto ignorados en las teorías de los mercados eficientes, o en la selección moderna de portafolios de Markowitz, aunque poco a poco el paradigma está cambiando.

2.3 La Teoría de los Mercados Eficientes

En los mercados financieros parece ser que el ser humano encontró un nuevo juego para entretenerse, que incluso puede generar cuantiosas ganancias o pérdidas totales. Es como si la teoría de la probabilidad basada en los juegos de azar, encontrara un nuevo tablero para desarrollarse. Así pues con la creación de los mercados financieros y las bolsas de valores, en donde los corredores juegan a intercambiar activos, el riesgo vuelve a ser una parte central de la partida, y su predicción una búsqueda constante, que ha fascinado a muchos y dejado en la ruina a otros.

Con la creciente evolución de esta industria financiera, el desarrollo de herramientas para medir el riesgo y minimizarlo no se dejó esperar, así grandes nombres como el de Markowitz, padre de la teoría moderna de selección de portafolios, o Black y Scholes creadores de la famosa fórmula para calcular el precio de las opciones, quedaron marcados en el desarrollo de la Teoría de los Mercados Eficientes. Ambos avances fueron reconocidos con el Nobel en Economía en 1990 y 1997 respectivamente, y sin ellos tal vez habríamos tardado más en entender a nuestras propias creaciones, a nuestros mercados financieros. Y aunque estas teorías están basadas en supuestos de normalidad y linealidad, nos ayudaron por un tiempo a comprender el riesgo. Sin embargo la natural evolución del

pensamiento y los nuevos descubrimiento gracias a los avances tecnológicos, nos dicen que es tiempo de cambiar de idea, de dar un salto a una que nos ayude a comprender más a fondo el comportamiento de la volatilidad, para así poder modelar de una mejor manera a nuestro querido amigo: el Riesgo.

Ningún otro concepto en inversión financiera ha sido tan ampliamente utilizado y tan poco confiable, que la Teoría de los Mercados Eficientes. A continuación y como establece Peters en su libro: *Caos y Orden en los Mercados de Capitales* (1996), podemos enunciar esta teoría en los siguientes conceptos básicos:

- 1. Los Inversionistas actúan de manera racional:** Los inversionistas buscan la eficiencia en los mercados de acuerdo a la regla de varianza contra rendimiento medio, es decir, elegirán los activos que presenten mayor rendimiento medio y menor varianza. Y valúan los rendimientos potenciales mediante la asignación de probabilidades, ponderando así distintos escenarios, lo cual les genera un rendimiento esperado del activo. El riesgo es medido por la desviación estándar, la σ del rendimiento. En conclusión, los inversionistas desean activos que les den un mayor rendimiento a un nivel de riesgo dado, asumiendo que tratan de evitar el riesgo si tienen esa opción.
- 2. Mercados Eficientes:** Los precios reflejan toda la información que está disponible. Los cambios de los precios no se encuentran relacionados, es decir los precios de ayer no influyen en los de hoy, sólo se presenta una ligera dependencia en el corto plazo, la cual se disipa enseguida por la tendencia del mercado a la búsqueda de equilibrios. La valuación de los activos es determinada por el consenso de un gran número de analistas.

3. Caminatas Aleatorias: Debido a los conceptos anteriores, los rendimientos siguen una caminata aleatoria y su generalización en tiempo continuo que es el movimiento browniano. Por lo tanto, la distribución de probabilidad de los rendimientos debe ser aproximadamente normal o log-normal. Esto significa que como mínimo, la distribución de los rendimientos debe tener media y varianzas finitas.

En los postulados anteriores podemos observar que la Teoría de los Mercados Eficientes es altamente dependiente de los supuestos de normalidad, y de la racionalidad de los inversionistas. Por otro lado muchos estudios han demostrado que los rendimientos no son normales, y que lo que definimos como racionalidad a veces no es la forma en cómo los inversionistas realmente actúan, algunas ramas de la psicología de la toma de decisiones y nuevos estudios en el comportamiento financiero lo han demostrado (Bernstein, 1996).

Al inicio de los años 60 y principios de los 70, estas teorías eran enseñadas como verdades absolutas, y las múltiples tesis de MBA presentadas al respecto de cierta forma validaban estas hipótesis, sin embargo con el desarrollo de la ciencia computacional, y la aparición de nuevas teorías, estos supuestos dejaron de ser tan poderosos como antes (Peters, 1996).

Dos principales posibilidades han sido ignoradas en este modelo: que los mercados y los activos financieros son dependientes y, que el modelo del inversionista racional no es realista. Los inversionistas no se comportan de manera ordenada y coherente, tratar de predecir el comportamiento humano es algo muy ambicioso, más ahora en el mundo globalizado en el que vivimos, los tiempos han cambiado, y la era de la información ha

llegado, el cómo interpretan esa información los inversionistas depende de muchas cosas. Sin embargo entender estos comportamientos puede ser la parte crucial, aunque las matemáticas se vuelvan más complicadas, al fin y al cabo, la vida es compleja.

2.4 La Teoría de la Complejidad

Para enunciar posteriormente la Teoría del Caos tenemos que exponer inicialmente la teoría que la engloba, es decir la Complejidad.

Al menos en las sociedades occidentales siempre hemos tratado de ordenar y racionalizar la realidad, de explicarla y de hacer de la vida algo menos incierto, pero ¿lo hemos logrado?, ¿es así realmente como funciona?, probablemente tendremos que re-direccionar el rumbo.

Separamos y analizamos el todo en sus partes, y claro, esto nos ayuda a entenderlo un poco más, pero ya no analizamos los impactos de todas las partes en conjunto, obviamente no es fácil, de hecho es bastante complejo, sin embargo nuestros caminos se dirigen hacia ese análisis.

Dividimos el trabajo de la familia, los pensamientos racionales de las emociones, las matemáticas del arte, los negocios de la biología, y el espíritu del cuerpo, pero no están divididos realmente, y parece ser que las cosas no funcionan tal y como nuestras gráficas cartesianas lo indican, hemos racionalizado hasta nuestros sistemas de gobierno y principalmente nuestras economías, creyendo ingenuamente y casi dogmáticamente que nuestros modelos son infalibles, esos modelos que sólo son nuestra representación de la realidad, lo que nos permite hacerla más entendible, es nuestra idea de cómo creemos que funcionan las cosas, pero ahora con la interacción más rápida entre culturas, el intercambio

de información, la duplicación del conocimiento y la globalización constante, dicha modelación se vuelve más compleja.

No podemos seguir analizando las cosas fragmentadas, tenemos que tratar de conjuntar todos los enfoques, las más extrañas pero posibles y reales combinaciones, entender que nuestras contradicciones son razones en la naturaleza y tratar de interpretar nuestras teorías en una forma diferente. La incertidumbre y el caos son inherentes a la naturaleza, el riesgo es una parte central siempre presente, y entonces ¿por qué lo hemos tratado de alejar o mantener marginado?, debemos entenderlo, hacerlo parte del sistema, alimentando así nuestros modelos.

La Teoría de la Complejidad tiene que ver más con estos enfoques, con el hecho de que no podemos separar las cosas y analizar los sistemas de manera fragmentada, nuestros supuestos han sido muy simplificados al inicio, y debemos empezar a ver las cosas de una manera más real, aunque un tanto complicada.

Las características de la complejidad, así presentadas por Ernesto Gálvez en su tesis Doctoral sobre el Análisis Fractal del Mercado Financiero Mexicano (2005), son las siguientes:

- La complejidad de un sistema depende del número de elementos que interactúan entre sí.
- La interacción de muchas partes de un sistema da origen a conductas y propiedades no encontradas en los elementos individuales del sistema.
- La complejidad es una medida de información necesaria para describir la función y estructura de un sistema. Es un estado variado que involucra

interacciones y diferentes componentes, como en la interconexión de partes de una estructura.

- La complejidad es el comportamiento de aquellas unidades dotadas con el potencial de evolucionar en el tiempo. Ese potencial admite la información de nuevas leyes.
- La complejidad estudia las propiedades fundamentales de sistemas adaptables complejos y la regeneración no lineal.
- Los estudios de complejidad son generalmente multidisciplinarios.
- La complejidad se da en los sistemas. Un elemento aislado no puede aumentar su complejidad porque no interactúa con los otros elementos endógenos y exógenos de los sistemas. En el momento en que dos elementos interactúan surge un sistema.
- La complejidad es un proceso evolutivo que sigue un comportamiento no lineal con base en crisis sucesivas.

Sin duda alguna los mercados financieros son sistemas complejos, y por lo tanto tienen que ser modelados en base a estos supuestos, en las secciones siguientes expondremos los motivos por los cuales la teoría del caos y los fractales, resultan ser buenos candidatos para dicha modelación.

2.5 La Teoría del Caos

A diferencia de lo que muchas personas piensan, la teoría del caos tiene que ver con una revalorización del orden, es decir, una nueva concepción de la naturaleza, lidia con términos deterministas y aleatorios, y en pocas palabras nos dice que el orden y el caos

coexisten. Es decir que muchos de los fenómenos en la naturaleza son deterministas en lo general y aleatorios en lo particular, pero siguen algunos patrones que nos permiten modelarlos, en algunos casos (Coles, 2006).

El descubrimiento y formalización del caos con todas sus ramificaciones, se ha considerado como la tercera gran revolución científica de nuestra era, comparable a lo que en su día provocaron la relatividad y la teoría cuántica. Y es entre otras cosas por su consideración de la no linealidad en los sistemas dinámicos, y por su cercanía a la realidad compleja.

Un sistema dinámico se considera caótico si presenta un comportamiento aperiódico, resultado de un modelo totalmente determinista y que es muy sensible a las condiciones iniciales. Además son sistemas adaptativos y que se retroalimentan. Son sistemas también caracterizados por su alta complejidad (Peters, 1996).

La base formal de la teoría del caos se inicia con Edwar Lorenz quien realizó estudios sobre el comportamiento no lineal de un sistema de tres ecuaciones, que pretendía predecir las condiciones climáticas (Peters, 1996). De ahí surge la gran aplicación de estas metodologías y técnicas a diversas áreas de la ciencia.

Con el rompimiento de los paradigmas lineales en los mercados financieros, nuevas alternativas como el caos encontraron seguidores, siendo uno de los pioneros en el tema Benoît Mandelbrot, quien inicialmente se apasionó por el estudio de los procesos económicos al estudiar las fluctuaciones en los precios del algodón en los años 60, indicando así las posibles fallas de las teorías de los mercados eficientes, sin embargo para entonces los postulados de esta teoría eran ampliamente aceptados por la comunidad científica de la época, situación por la cual Mandelbrot dirigió sus esfuerzos a otra de sus

grandes pasiones, encontrando así una formalización a la geometría de la naturaleza a través de los fractales.

Sin duda los mercados financieros son sistemas dinámicos complejos, que bien podrían ser modelados por las técnicas del caos, son también sistemas que evolucionan y se adaptan para lograr lo que cualquier estructura pretende, la sobrevivencia (Peters, 1996). Es por ello que la forma determinista y frecuentista que habíamos adoptado para medir estos sistemas parece abrirle camino a un enfoque un tanto más real a través de la modelación de esta complejidad.

Así pues la Teoría del Caos nos permite alejarnos de los supuestos de linealidad y adentrarnos un poco más en la complejidad de la naturaleza, además nos dice que ése caos natural puede presentar un orden, o que más bien hemos definido orden en base a nuestros antiguos conceptos y formas de pensar que heredamos de los antiguos griegos, es decir que tratamos de simplificar todo a formas exactas y a verdades simples, sin embargo como decía el mismo Mandelbrot: “las montañas no son conos, ni las nubes esferas”. La realidad y la naturaleza son complejas, es hora de tratar de entender esa complejidad.

2.6 La Geometría de la Naturaleza: Los Fractales

Muchos son los que se han adentrado al mundo de los fractales atraídos simplemente por el bello colorido de los conjuntos de Mandelbrot o Julia, sin embargo la trascendencia de estas figuras, sus curiosidades y propiedades matemáticas, hacen que sean aún más fascinantes.

Los fractales son una rama de la teoría del caos y a su vez de la complejidad debido a sus características. Y tienen su origen en una geometría que trata de acercarse más a las

formas de la naturaleza, en contraste con la geometría euclidiana, que simplifica la realidad a formas sencillas y exactas. Se diferencia de ésta principalmente en que los fractales presentan mayores características y complejidad a medida que se analizan en partes, ante la simplicidad de los cuerpos geométricos regulares, que se hacen aun más simples al ser analizados en sus partes.

Muchos han aportado al desarrollo de la geometría fractal, pero el padre indudable es Mandelbrot, quien también acuñó el término fractal y que se deriva de la palabra latina *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Desde su juventud se apasionó por el estudio de los así llamados monstruos matemáticos ya existentes como el conjunto de Cantor, hasta que logró su modelación y formalización, encontrando incluso sus aplicaciones en diversas áreas como en la economía matemática (Peters, 1996).

Los fractales son en sí estructuras que presentan las siguientes características:

- Auto-similitud.
- Complejidad.
- Invariancia ante los cambios de escala.
- Su dimensión fractal (enunciada por Mandelbrot como la dimensión de Hausdorff-Besicovitch), es mayor a la dimensión topológica.

Ahora presentaremos algunos de los fractales más conocidos, como son el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y el conjunto de Mandelbrot.

El **conjunto de Cantor** es una curiosidad matemática, que aturdió varias mentes matemáticas a tal grado de decir que eran monstruos de la naturaleza, anomalías las cuales

no tenía sentido estudiar a fondo, pero paradójicamente la naturaleza se comporta así, nuestras anomalías resultan ser la normalidad de nuestro mundo.

Se construye así:

- El primer paso es tomar el intervalo $[0, 1]$.
- El segundo paso es dividir el intervalo en tres partes iguales y quitarle el intervalo central, es decir el intervalo abierto $(1/3; 2/3)$.
- El tercero es volver a dividir los sub-intervalos en tres partes iguales y quitarles los intervalos centrales correspondientes, es decir los intervalos abiertos $(1/9; 2/9)$ y $(7/9; 8/9)$.
- Los pasos siguientes son idénticos: dividir los sub-intervalos en tres partes iguales y quitar los intervalos centrales que quedan. El proceso no tiene fin.

Notamos la similitud que existe dentro de la figura total y sus partes.

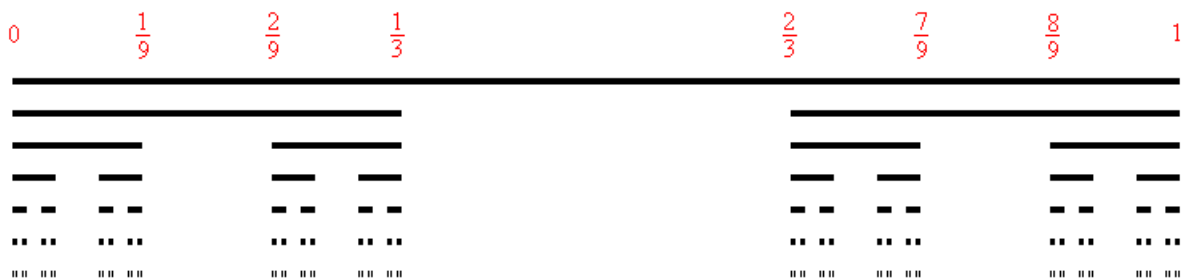


Figura 2.1 El Conjunto de Cantor
Fuente: Wikipedia

El **Triángulo de Sierpinski** se obtiene de extraer de un triángulo, el triángulo central formado por los puntos medios de sus lados, e iterar el proceso sucesivamente. Encontramos, como en el ejemplo anterior, una similitud de la figura total y sus partes.

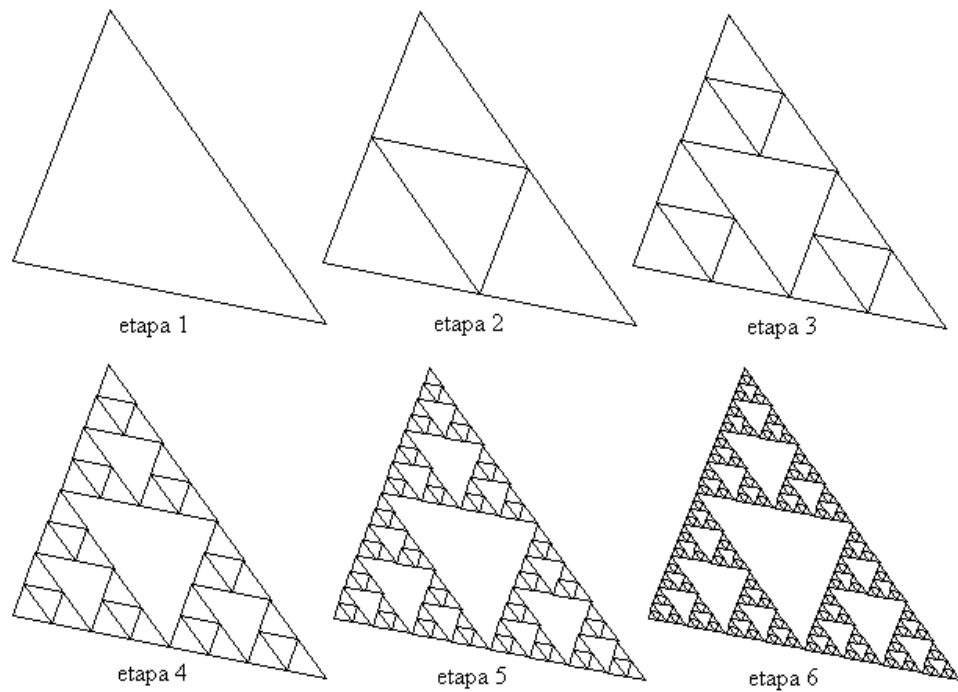


Figura 2.2 *El Triángulo de Sierpinski*
Fuente: Wikipedia

Mediante el método de compactación de imágenes de Barnsley que presentaremos más adelante, se obtiene:

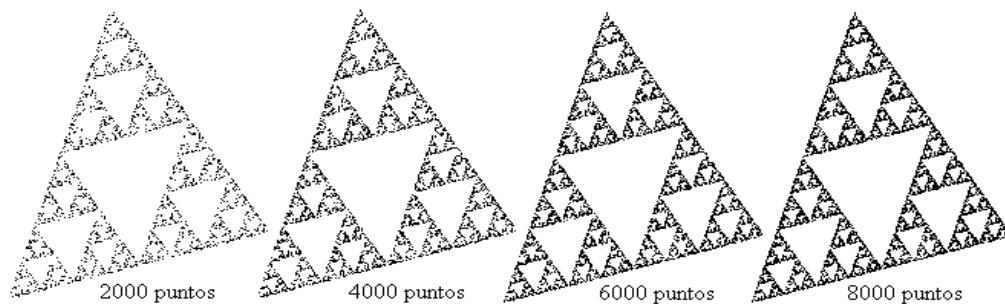


Figura 2.3 *Compactación del Triángulo de Sierpinski*
Fuente: Wikipedia

El **conjunto de Mandelbrot**, que es probablemente la imagen fractal más conocida y asociada con el término fractal y para cuya obtención consideraremos la función compleja siguiente:

$$F_c(Z) = Z^2 + c$$

Donde si F_c^n es la n -ésima iteración de F_c , la figura mostrada se obtiene al pintar de colores de acuerdo a las velocidades de escape, los complejos c para los cuales la sucesión, $\{|F_c^n(0)|\}_n$ diverge al infinito (Romero, 1992).

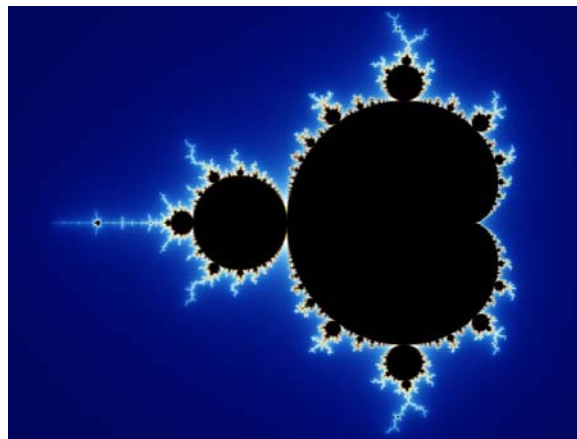


Figura 2.4 El Conjunto de Mandelbrot
Fuente: Wikipedia

Las aplicaciones de la geometría fractal han ido incrementándose en los últimos años, desde modelar ambientes para gráficos computacionales, crear figuras que asemejan paisajes naturales y las costas geográficas, hasta su aplicación en los modelos de volatilidad para los cuales pretendemos encontrar una extensión, es por ello que la nueva matemática del caos, a través de los fractales, nos brinda elementos para entender mejor o maravillarnos más acerca del comportamiento de los mercados, o en las palabras del mismo Mandelbrot: *“Pienso que la difusión de la teoría del caos y la geometría fractal en las ciencias sociales es esencial para nuestra futura evolución, tal como el arte de contar fue esencial en los orígenes de nuestra cultura”*