

CAPITULO 7. METODOLOGÍA DEL PLAN DE PENSIONES ALTERNATIVO

7.1 Anualidad de Vida

Como se explica en el capítulo 4, una anualidad es una serie de pagos que se realizan durante un tiempo determinado, nombrándose a esta anualidad temporal o de manera vitalicia. En éste caso, el monto de los pagos deben ser iguales así como haber uniformidad en los periodos de pago.

Una anualidad de vida, es una anualidad contemplando la probabilidad de sobrevivencia de una persona en el tiempo, periodo en el cual se le paga el monto determinado. Hay dos formas de calcular estas anualidades de vida y la diferencia entre ellas es la fecha en que se hace el primer pago de la serie que la conforman. La primera forma se llama *anualidad de vida anticipada*, en esta el pago se encuentra situado al principio de cada periodo de pago; en cuanto a la segunda forma se denomina *anualidad de vida vencida* que se refiere a que el pago se encuentra al final de cada periodo de pago de la serie que la conforman. Para realizar los cálculos necesarios en este diseño la fórmula empleada es de manera anticipada y se expresa de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} {}_k p_x \quad (7.1)$$

Donde:

\ddot{a}_x = Notación actuarial del valor presente de una anualidad anticipada vitalicia.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está en el periodo k .

i = Tasa de interés.

x = Edad actual de una persona.

${}_k p_x$ = Probabilidad de llegar con vida de edad (x) a edad $(x+k)$.

7.2 Vidas Conjuntas

En este nuevo plan alternativo se contempla al cónyuge al momento en que fallece el trabajador, de la misma forma que en plan anterior, es por eso que se utilizan anualidades del último sobreviviente y para calcularla es importante mencionar nuevamente la fórmula de la anualidad de vidas conjuntas, la cual representa el valor presente de una serie de pagos hechos al final de cada año mientras todos los integrantes del grupo, (x) , (y) , sigan con vida. El valor presente de este beneficio se define de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} {}_k p_{xy} \quad (7.2)$$

Donde:

\ddot{a}_{xy} = Notación actuarial del valor presente de una anualidad anticipada sobre vidas conjuntas.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está en el periodo k .

i = Tasa de interés.

${}_k p_{xy}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas de edades (x) y (y) , ambas lleguen con vida k periodos después.

7.3 Último sobreviviente

La probabilidad de que dadas dos vidas (x) y (y) por lo menos una de ellas quede con vida n periodos después se denota de la siguiente manera:

$${}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy} \quad (7.3)$$

Donde:

${}_n p_{\overline{xy}}$ = Probabilidad de que el último sobreviviente del grupo (x) y (y) llegue con vida n periodos después

${}_n p_x$ = Probabilidad de llegar con vida de edad (x) a edad $(x+n)$.

${}_n p_y$ = Probabilidad de llegar con vida de edad (y) a edad $(y+n)$.

${}_n p_{xy}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas (x) y (y) ambas lleguen con vida n periodos después.

Enfocadas las probabilidades anteriormente vistas en anualidades, la relación quedaría de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{(12)} = \ddot{a}_x^{(12)} + \ddot{a}_y^{(12)} - \ddot{a}_{xy}^{(12)} \quad (7.4)$$

Bajo la hipótesis de linealidad de las D_x se puede escribir:

$$\ddot{a}_x^{(12)} = \ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m} \quad (7.5)$$

$$\ddot{a}_y^{(12)} = \ddot{a}_y + \frac{m-1}{2m} \quad (7.6)$$

$$\ddot{a}_{xy}^{(12)} = \ddot{a}_{xy} + \frac{m-1}{2m} \quad (7.7)$$

Donde:

$\ddot{a}_{xy}^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad anticipada que paga \$1/12 al principio de cada mes, de manera vitalicia, hasta que muera el último sobreviviente.

$\ddot{a}_x^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad anticipada que paga \$1/12 al principio de cada mes, de manera vitalicia hasta que muera (**x**).

$\ddot{a}_y^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad anticipada que paga \$1/12 al principio de cada mes, de manera vitalicia hasta que muera (**y**).

$\ddot{a}_{xy}^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad anticipada que paga \$1/12 al principio de cada mes, de manera vitalicia hasta la primera muerte entre (**x**) o (**y**).

m = El periodo es mensual por lo que es 12.

7.4 Anualidad Temporal

Una anualidad temporal es el valor presente actuarial de pagos que se realizan periódicamente mientras (**x**) sobreviva durante los n años siguientes. Hay dos tipos de anualidades y se diferencian en la forma en que se realizan los pagos; la primera se

denomina *anualidad temporal vencida* y en esta se realizan los pagos al final del periodo en que se esta evaluando; a la segunda forma de anualidad se denomina *anualidad temporal anticipada* y en este caso se realizan los pagos al principio de cada periodo. Para realizar los cálculos de este diseño se hace uso del segundo caso y la manera de realizarlo es la siguiente:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{-k} {}_k p_x \quad (7.8)$$

Donde:

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que esta k periodos después.

i = Tasa de interés.

${}_k p_x$ = Probabilidad de que una persona de edad (x) llegue con vida k periodos después.

n =Periodo en que terminan los pagos de \$1 y varia entre 20 y los años que le faltan para llegar a la edad de algún tipo de retiro.

7.5 Teoría de Decrementos Múltiples

En la estructura de este nuevo plan de pensiones alternativo también se toman en cuenta las salidas del grupo por retiro, muerte, invalidez y las posibilidades de que un trabajador salga por cualquiera de esas causas. Se toma nuevamente la *Teoría de Decremento Múltiple* para analizar a este grupo de personas que están sujetas a varias causas independientes de decrementos.

De la misma manera que en el capítulo 4, se considera a un número determinado de personas sin posibilidad de nuevas entradas o reingresos por lo que el modelo se denomina de Grupo Cerrado. Para realizar los cálculos que involucra esta teoría, las formulas empleadas son las siguientes:

$$p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)} \quad (7.9)$$

$$q_x^{(T)} = \sum_{i=1}^j q_x^{(i)} \quad (7.10)$$

Donde:

$p_x^{(T)}$ = Probabilidad de que una persona de edad (x) permanezca en el grupo a edad $(x+1)$.

$q_x^{(T)}$ = Probabilidad de que una persona de edad (x) salga del grupo por cualquiera causa (j) .

$q_x^{(j)}$ = La probabilidad de que una persona abandona el grupo por la causa (j) entre las edades (x) y $(x+1)$.

7.6 Cálculo de la Aportación del Patrón

A diferencia del plan expuesto en el capítulo 4, esta metodología se enfoca al diseño de un plan privado de pensión de contribución definida. En este caso, la aportación del patrón se fija en un 15% del sueldo anual del trabajador incluyendo prestaciones que le corresponden por ley.

Marcando nuevamente la diferencia con el capítulo 4, las aportaciones que forman el monto de la pensión son variables de modo que aún cuando el patrón siempre aporte el 15% del salario anual del trabajador, esta contribución va a cambiar cada año pues el salario del empleado se incrementa a razón de 2% anual.

Para la realización de estas contribuciones se han marcado tres formas de salidas del plan por pensión y la forma de calcular estas contribuciones se define para cada caso de la siguiente forma:

- **Retiro Normal**

Es importante recordar que el retiro normal se da a partir de que el trabajador cuenta con 65 años de edad y se le da la cantidad acumulada correspondiente al 15% de su salario anual por cada año laborado después de haber cumplido dos años en la empresa.

La fórmula que se utiliza para el cálculo de estas aportaciones es la siguiente:

Primera parte:

$$Monto_1 = \sum_{k=x_0}^x SA \cdot (1 + i_{sal})^{-(x-k)} \cdot (i_{ap}) \cdot (1 + i)^{65-k} \quad (7.11)$$

Segunda parte:

$$Monto_2 = \sum_{k=x+1}^{65} SA \cdot (1 + i_{sal})^{-(x-k)} \cdot (i_{ap}) \cdot (1 + i)^{65-k} \cdot {}_{k-x}P_x \quad (7.12)$$

Por lo tanto, la cantidad total acumulada por el patrón es de la siguiente forma:

$$Monto_{total} = Monto_1 + Monto_2 \quad (7.13)$$

Donde:

Monto_1 = El valor futuro de las aportaciones anuales, evaluadas en la edad de retiro (65), del patrón a partir de que el trabajador cuenta con 2 años de antigüedad calculados partiendo el salario a edad actual.

Monto_2 = El valor futuro de las aportaciones anuales, evaluadas en la edad de retiro (65), del patrón a partir de la edad actual del trabajador.

SA = Salario Anual del trabajador.

x = Edad actual del trabajador.

x_0 = Edad de alta del trabajador.

i_{sal} = Incremento Salarial real.

i_{ap} = Porcentaje de contribución por parte del patrón.

i = Tasa de interés real.

${}_{k-x+1}p_x$ = Probabilidad de que de edad x sobreviva a 65 años

La fórmula indica la manera en que se calculan las aportaciones que debe realizar el patrón de modo que acumule el monto, el cual que posteriormente se repartirá al trabajador de forma mensual, mediante beneficios o pensión. La suma muestra que el

fondo se junta de manera anual a razón de un porcentaje del salario vigente del trabajador a partir de que éste cumple con 2 años de antigüedad. A partir de ese año y hasta que el trabajador cumpla 65 años de edad se recopilarán estas aportaciones y dicho monto esta evaluado al momento en que el trabajador cumple 65 años de edad.

- **Retiro Anticipado**

Hay que recordar también que el trabajador se puede retirar de manera anticipada si cuenta con 60 años de edad. De la misma manera que en el retiro normal, el fondo se acumula a razón del 15% del salario vigente del trabajador por los años que labore, en este caso, un mínimo de 10 años más los 2 años que son requisito para que pueda entrar al plan y ser candidato a pensionarse de esta forma.

Primera parte:

$$Monto_1 = \sum_{k=x_0}^x SA \cdot (1 + i_{sal})^{-(x-k)} \cdot (i_{ap}) \cdot (1 + i)^{60-k} \quad (7.14)$$

Segunda parte:

$$Monto_2 = \sum_{k=x+1}^{60} SA \cdot (1 + i_{sal})^{-(x-k)} \cdot (i_{ap}) \cdot (1 + i)^{60-k} \cdot {}_{k-x}P_x \quad (7.15)$$

Por lo tanto, la cantidad total acumulada por el patrón es de la siguiente forma:

$$Monto_{total} = Monto_1 + Monto_2 \quad (7.16)$$

Donde:

$Monto_1$ = El valor futuro de las aportaciones anuales, evaluadas en la edad de retiro (**60**), del patrón a partir de que el trabajador cuenta con 2 años de antigüedad calculados partiendo el salario a edad actual.

$Monto_2$ = El valor futuro de las aportaciones anuales, evaluadas en la edad de retiro (**60**), del patrón a partir de la edad actual del trabajador.

SA = Salario Anual del trabajador.

x = Edad actual del trabajador.

x_0 = Edad inicial del trabajador.

i_{sal} = Incremento Salarial real.

i_{ap} = Porcentaje de contribución por parte del patrón.

i = Tasa de interés real.

${}_{k-x+1}P_x$ = Probabilidad de que de edad x sobreviva a 60 años.

En esta fórmula se muestra la forma en que se calculan las aportaciones que el patrón debe realizar para obtener el monto de la pensión. En esta ocasión la suma de estas aportaciones inicia a partir de que el trabajador entra al plan de pensiones y finaliza cuando el trabajador cumple 60 años de edad. Este cúmulo de las aportaciones esta evaluado al momento el trabajador cumpla 60 años.

- **Retiro Diferido**

Es importante recordar que el trabajador se puede retirar de manera diferida, si tiene 70 años cumplidos de edad. Así mismo, el fondo se va a ir acumulando a razón del 15% del salario vigente del trabajador por los años que labore, en este caso un mínimo de 10 años más los 2 años que son requisito para que pueda entrar al plan y ser candidato a pensionarse de esta forma.

La siguiente formula muestra la forma en que se van a calcular las aportaciones del retiro diferido:

Primera parte:

$$Monto_1 = \sum_{k=x_0}^x SA \cdot (1 + i_{sal})^{-(x-k)} \cdot (i_{ap}) \cdot (1 + i)^{70-k} \quad (7.17)$$

Segunda parte:

$$Monto_2 = \sum_{k=x+1}^{70} SA \cdot (1 + i_{sal})^{-(x-k)} \cdot (i_{ap}) \cdot (1 + i)^{70-k} \cdot {}_{k-x}P_x \quad (7.18)$$

Por lo tanto, la cantidad total acumulada por el patrón es de la siguiente forma:

$$Monto_{total} = Monto_1 + Monto_2 \quad (7.19)$$

Donde:

$Monto_1$ = El valor futuro de las aportaciones anuales, evaluadas en la edad de retiro (**70**), del patrón a partir de que el trabajador cuenta con 2 años de antigüedad calculados partiendo el salario a edad actual.

$Monto_2$ = El valor futuro de las aportaciones anuales, evaluadas en la edad de retiro (**70**), del patrón a partir de la edad actual del trabajador.

SA = Salario Anual del trabajador.

x = Edad actual del trabajador.

x_0 = Edad inicial del trabajador.

i_{sal} = Incremento Salarial real.

i_{ap} = Porcentaje de contribución por parte del patrón.

i = Tasa de interés real.

${}_{k-x+1}P_x$ = Probabilidad de que de edad x sobreviva a 70 años.

El cálculo de estas aportaciones es similar a la de las anteriores formas de retiro a diferencia que en este caso se realiza la suma que inicia desde que el trabajador entra al plan de pensiones y finaliza cuando el trabajador cumple 70 años de edad. Este cúmulo de las aportaciones esta evaluado al momento en que el trabajador cumple los 70 años de edad.

7.7 Valor Presente Actuarial

Para realizar el Valor Presente Actuarial (VPA) de este diseño alternativo se utilizan tres fórmulas diferentes ya que hay que definirlo para cada forma de retiro del trabajador. Como se define en el capítulo 4 de la presente tesis, el VPA es evaluar en una determinada fecha las obligaciones futuras del patrón. En este caso, se regresa a la fecha de hoy el monto de la pensión que se le dará al trabajador que se encuentra en la edad de 60, 65 o 70 años según sea retiro normal, anticipado o diferido respectivamente.

- **Retiro Normal**

$$VPA_{Monto} = Monto_{total} \cdot v^{65-x} {}_{65-x}P_x \quad (7.20)$$

Donde:

VPA_{Monto} = Valor presente Actuarial del Monto de las aportaciones anuales.

v^{65-x} = $(1+i)^{-(65-x)}$ Factor de descuento.

i = Tasa de interés real.

${}_{65-x}p_x$ = Probabilidad de que de edad x sobreviva a 65 años.

La formula (6.17) representa el valor presente actuarial de los beneficios que recibirá el trabajador a partir de que cuente con 65 años de edad. Lo anterior evalúa en el momento en que se este evaluando el plan de pensiones y es el cúmulo de las aportaciones.

- **Retiro Anticipado**

$$VPA_{Monto} = Monto_{total} \cdot v^{60-x} {}_{60-x}p_x \quad (7.21)$$

Donde:

VPA_{Monto} = Valor presente Actuarial del Monto de las aportaciones anuales.

v^{60-x} = $(1+i)^{-(60-x)}$ Factor de descuento.

i = Tasa de interés real.

${}_{60-x}p_x$ = Probabilidad de que de edad x sobreviva a 60 años.

- **Retiro Diferido**

$$VPA_{Monto} = Monto_{total} \cdot v^{70-x} {}_{70-x}p_x \quad (7.22)$$

Donde:

VPA_{Monto} = Valor presente Actuarial del Monto de las aportaciones anuales.

v^{70-x} = $(1 + i)^{-(70-x)}$ Factor de descuento.

i = Tasa de interés real.

${}_{70-x}p_x$ = Probabilidad de que de edad x sobreviva a 70 años.

7.8 Cálculo de los Beneficios

La contribución del patrón se refiere a lo que, en este caso, el municipio de Atlixco, tendrá que ir aportando a la institución financiera que manejará el fideicomiso.

- **Retiro Normal**

$$Monto_{total} = Beneficio \cdot \ddot{a}_{65:y+(65-x)}^{(12)} \quad (7.23)$$

Despejando de la fórmula anterior, beneficio queda en función de las aportaciones y una anualidad temporal hasta que el trabajador cumpla 65 años de edad.t

$$Beneficio = \frac{Monto_{total}}{\ddot{a}_{65:y+(65-x)}^{(12)}} \quad (7.23.1)$$

Donde:

$\ddot{a}_{65:y+(65-x)}^{(12)}$ = Anualidad temporal anticipada que paga \$1/12 al principio de cada mes.

- **Retiro Anticipado**

$$Monto_{total} = Beneficio \cdot \ddot{a}_{60:y+(60-x)}^{(12)} \quad (7.24)$$

Despejando el Beneficio de la fórmula anterior tenemos:

$$Beneficio = \frac{Monto_{total}}{\ddot{a}_{60:y+(60-x)}^{(12)}} \quad (7.24.1)$$

Donde:

$\ddot{a}_{60:y+(60-x)}^{(12)}$ = Anualidad temporal anticipada que paga \$1/12 al principio de cada mes.

- **Retiro Diferido**

$$Monto_{total} = Beneficio \cdot \ddot{a}_{70:y+(70-x)}^{(12)} \quad (7.25)$$

Despejando de la fórmula anterior tenemos que el beneficio queda en función de las aportaciones y una anualidad temporal hasta que el trabajador cumpla 70 años de edad.

$$Beneficio = \frac{Monto_{total}}{\ddot{a}_{70:y+(70-x)}^{(12)}} \quad (7.25.1)$$

Donde:

$\ddot{a}_{70:y+(70-x)}^{(12)}$ = Anualidad temporal anticipada que paga \$1/12 al principio de cada periodo

de pago.

7.9 Metodología en Números

7.9.1 Retiro Normal

Con la finalidad de ilustrar paso a paso la utilidad de las formulas anteriormente presentadas se toma un trabajador de la base de datos cuyos datos se muestran a continuación:

INFORMACIÓN TÉCNICA	
Tasa de interés técnico (i)	0.035
Tasa de incremento salarial (i_{sal})	0.02
% de Aportación del Patrón (i_{ap})	0.15

Tabla 7. 1 Información del Trabajador
Fuente: Elaboración Propia

INFORMACION TRABAJADOR	
Sueldo anual	50628.8
Edades a la fecha de hoy (x)	51
Antigüedad	17
Edad de alta (x_0)	34
Género del Trabajador	F

Tabla 7. 2. Información Técnica para los Cálculos
Fuente: Elaboración propia

Un dato importante a resaltar en esta ocasión es que se toma un trabajador que no tiene esposa.

Las aportaciones de este diseño alternativo. Al desarrollar la fórmula 7.11 se tiene lo siguiente:

Primera parte:

$$\begin{aligned}
 Monto_1 &= \sum_{k=34}^{51} 50,628.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-k)} \cdot (1 + 0.035)^{65-k} \\
 &= 50,628.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-34)} \cdot (1 + 0.035)^{65-34} \\
 &+ 50,628.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-35)} \cdot (1 + 0.035)^{65-35} \\
 &+ 50,628.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-36)} \cdot (1 + 0.035)^{65-36} \\
 &+ \dots + \\
 &+ 50,628.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-51)} \cdot (1 + 0.035)^{65-51} \\
 &= 15,756 + 15,527 + 15,302 + \dots + 12,293 \\
 &= 251,225
 \end{aligned}$$

Segunda parte:

$$\begin{aligned}
 Monto_2 &= \sum_{k=51+1}^{65} 50,608.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-k)} \cdot (1 + 0.035)^{65-k} \cdot {}_{k-51}P_{51} \\
 &= 50,608.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-52)} \cdot (1 + 0.035)^{65-52} \cdot {}_{52-51}P_{51} \\
 &+ 50,608.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-53)} \cdot (1 + 0.035)^{65-53} \cdot {}_{53-51}P_{51} \\
 &+ 50,608.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-54)} \cdot (1 + 0.035)^{65-54} \cdot {}_{54-51}P_{51} \\
 &+ \dots + \\
 &+ 50,608.8 \cdot (0.15) \cdot (1 + 0.02)^{-(51-65)} \cdot (1 + 0.035)^{65-65} \cdot {}_{65-51}P_{51} \\
 &= 14,270.51 + 13,935.29 + 13,248.21 + \dots + 7,626.609 \\
 &= 208,267.344
 \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior el $Monto_{total}$ es la suma de ambos montos por lo que:

$$Monto_{total} = Monto_1 + Monto_2 = 251,225 + 208,267.244 = 459,492.2$$

Una vez que se obtiene el monto total de la pensión se calcula el VPA de ese monto de la pensión:

$$VPA_{Monto} = Monto_{total} \cdot v_{65-x}^{65-x} p_x$$

$$\begin{aligned} VPA_{Monto} &= 459,492.2 \cdot 0.617782 \cdot 0.86278 \\ &= 244,913.9 \end{aligned}$$

Ahora necesitamos calcular una anualidad vitalicia a partir de la edad de retiro del trabajador que en este caso es 65 años para calcular el beneficio de la pensión. La manera de hacerlo es la siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{65:y+(65-x)} &= \sum_{k=0}^{110-65-1} (1+0.035)^{-k} p_{65} \\ &= 11.1901133 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{65:y+(65-x)}^{(12)} &= \ddot{a}_{65:y+(65-x)} + \frac{11}{24} \\ &= 11.1901133 + \frac{11}{24} \\ &= 11.6484466 \end{aligned}$$

El siguiente paso para calcular el beneficio del trabajador de este ejemplo es realizar una anualidad temporal. Para ello se utiliza la formula 7.8 que es la que se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 \text{Beneficio} &= \frac{\text{Monto}_{total}}{\ddot{a}_{65:y+(65-x)}^{(12)}} \\
 &= \frac{459,492.2}{11.6484466} \\
 &= 39,446.65
 \end{aligned}$$

A manera de conclusión es importante resaltar los resultados obtenidos de la siguiente manera:

Resultados Finales	
Monto de la pensión	\$ 459,492.2
Beneficio a edad de retiro	\$ 39,446.65
Aportación del patrón	%15

Los cálculos para el retiro anticipado y el Retiro Diferido se realizan de manera análoga a los presentados en este apartado del capítulo.