CAPITULO 4. METODOLOGÍA

4.1 Anualidad de Vida

Una anualidad es una serie de pagos que se hacen mediante una duración determinada, ya sea temporal, durante un periodo de tiempo o de manera vitalicia. En este caso, los pagos son iguales y hay uniformidad en los periodos de pago. Ahora bien, una anualidad de vida es una anualidad contemplando la probabilidad de sobrevivencia de una persona en el tiempo; periodo en el cual se le paga el monto determinado.

La fórmula (4.1) es para calcular el valor presente de una anualidad vitalicia que paga 1 peso al final de cada periodo siempre y cuando el participante permanezca con vida.

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \, {}_k p_x \tag{4. 1}$$

Donde:

$\ddot{a}_x$ = Notación actuarial del valor presente de una anualidad vencida vitalicia.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está ***k*** periodos después.

i = Tasa de interés.

x = Edad actual de una persona.

${}_k p_x$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x)*** llegue con vida a edad ***(x+k)***.

4.2 Vidas Conjuntas

El valor presente de una anualidad vencida de vidas conjuntas de forma vitalicia, representa una serie de pagos hechos al final de cada año mientras todos los integrantes del grupo, de edades ***(x)*** y ***(y)***, sigan con vida. La anualidad de este beneficio se define de la siguiente manera:

$$a_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k} \, {}_k p_{xy} \tag{4. 2}$$

Donde:

a_{xy} = Notación actuarial del valor presente de una anualidad vencida sobre vidas conjuntas.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está ***k*** periodos después.

i = Tasa de interés.

$_{k}p_{xy}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas de edades ***(x)*** y ***(y)***, ambas lleguen con vida ***k*** periodos después.

4.3 Último sobreviviente

La probabilidad de que dadas dos vidas ***(x)*** y ***(y)*** por lo menos una de ellas quede con vida n periodos después se denota de la siguiente manera:

$$_{n}p_{\overline{xy}} = {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{xy} \tag{4. 3}$$

Donde:

$_{n}p_{\overline{xy}}$ = Probabilidad de que el último sobreviviente del grupo ***(x)*** y ***(y)*** llegue con vida ***n*** periodos después

$_{n}p_{x}$ = Probabilidad de llegar con vida de edad ***(x)*** a edad ***(x+n)***.

$_{n}p_{y}$ = Probabilidad de llegar con vida de edad ***(y)*** a edad ***(y+n)***.

$_{n}p_{xy}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas ***(x)*** y ***(y)*** ambas lleguen con vida ***n*** periodos después.

Aplicando el concepto anterior a una anualidad en m-ésimos la relación queda de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{(12)} = \ddot{a}_{x}^{(12)} + \ddot{a}_{y}^{(12)} - \ddot{a}_{xy}^{(12)} \tag{4. 4}$$

Bajo la hipótesis de linealidad de las D_x se puede escribir:

$$\ddot{a}_{x}^{(12)} = \ddot{a}_{x} + \frac{m-1}{2m} \tag{4. 5}$$

$$\ddot{a}_{y}^{(12)} = \ddot{a}_{y} + \frac{m-1}{2m} \tag{4. 6}$$

$$\ddot{a}_{xy}^{(12)} = \ddot{a}_{xy} + \frac{m-1}{2m} \tag{4. 7}$$

Donde:

$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad que paga \$1/12 al final de cada mes, de manera vitalicia, hasta que muera el último sobreviviente.

$\ddot{a}_{x}^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad que paga \$1/12 al final de cada mes, de manera vitalicia hasta que muera ***(x)***.

$\ddot{a}_{y}^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad que paga \$1/12 al final de cada mes, de manera vitalicia hasta que muera ***(y)***.

$\ddot{a}_{xy}^{(12)}$ = Valor presente de una anualidad que paga \$1/12 al final de cada mes, de manera vitalicia hasta la primera muerte entre ***(x)*** o ***(y)***.

m = 12, ya que el periodo es mensual.

4.4 Anualidad Temporal

Una anualidad temporal anticipada es el valor presente actuarial de pagos que se realizan a principio del periodo, mientras ***(x)*** sobreviva durante los ***n*** años siguientes. Se denota de la siguiente forma:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{-k} \, {}_{k}p_{x} \tag{4. 8}$$

Donde:

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está ***k*** periodos después.

i = Tasa de interés.

${}_{k}p_{x}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x)*** llegue con vida a edad ***(x+k)***.

4.5 Teoría de Decrementos Múltiples

En los sistemas de pensiones deben tomarse en cuenta salidas del grupo por retiro, muerte, invalidez y, de alguna manera, estimar el número de trabajadores que pueden salir por cada una de esas causas. El modelo matemático para analizar este tipo de problemas se conoce como Teoría de Decremento Múltiple. Este modelo asume que existe un grupo de personas que están sujetas a varias causas independientes de decrementos. Esta teoría involucra, a su vez, un Grupo Cerrado, lo que significa tomar un número determinado de personas sin posibilidad de tener nuevas entradas y reingresos. Las fórmulas de probabilidades de decremento son las siguientes:

$$p_x^{(T)} = 1 - q_x^{(T)} \tag{4. 9}$$

$$q_x^{(T)} = \sum_{i=1}^{j} q_x^{(i)} \tag{4. 10}$$

Donde:

$p_x^{(T)}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x)*** permanezca en el grupo a edad ***(x+1)***.

$q_x^{(T)}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x)*** salga del grupo por cualquiera causa ***(j)***.

$q_x^{(j)}$ = La probabilidad de que una persona abandona el grupo por la causa ***(j)*** entre las edades ***(x)*** y ***(x+1)***.

4.6 Salario Pensionable

El salario pensionable queda definido como el promedio de los últimos 5 años de sueldo inmediatos pensionables al retiro del trabajador. El salario incluye únicamente aguinaldos equivalentes a 30 días de salario mínimo y primas vacacionales correspondientes a 10 días de salario mínimo y en ningún caso pagos extraordinarios como horas extras, etc.

La fórmula que define el cálculo de un salario pensionable, dado que el salario tomado del trabajador es anual, es la siguiente:

$$SP_{z_j} = \frac{\left\lfloor S_{z_j} + S_{(z-1)_j} + S_{(z-2)_j} + S_{(z-3)_j} + S_{(z-4)_i} \right\rfloor}{5} \qquad (4.\ 111)$$

$$S_{z_j} = S_{x_j}\left(1 + i_{salarial}\right)^{z_j - x_j} \qquad (4.\ 1212)$$

Donde:

SP_{z_j} = Salario pensionable del participante ***(j)***.

S_{z_j} = Último salario del participante ***(j)***

S_{x_j} = Salario actual anual del participante ***(j)***

$i_{salarial}$ = Tasa de incremento salarial

Z_j = Edad de jubilación del participante ***(j)***.

x_j = Edad actual del participante ***(j)***.

4.7 Cálculo del Beneficio por Jubilación

Como se mencionó en el capítulo 2 del presente trabajo de investigación, los planes privados de pensión se dividen en dos tipos: planes de beneficio definido y planes de contribución definida. Para la elaboración de esta primera parte de la tesis se utiliza el primer plan y el beneficio queda determinado mediante el salario del trabajador y los años de servicio principalmente, los cuales están contemplados al realizar el cálculo del salario pensionable. En este caso, el monto de las aportaciones es igual al valor presente actuarial de los beneficios de jubilación.

El beneficio por jubilación, como se explicó en el capítulo 3, queda determinado por el salario pensionable de cada trabajador. Lo anterior lleva a que el beneficio del plan de pensiones está puntualizado como un porcentaje del salario pensionable de jubilación correspondiente al número de años laborados en el municipio.

$$B = SP_{z_j} \cdot r_a \tag{4. 13}$$

Donde:

B = Beneficio.

SP_{z_j} = Salario pensionable del participante ***(j)***.

r_a = Porcentaje que varía de acuerdo a la edad y a los años de servicio del trabajador.

La fórmula anterior se utiliza para calcular el beneficio del primer año de jubilación del trabajador. En los años posteriores, este beneficio se verá afectado por el incremento salarial anual por lo que aumentará a razón de una tasa fija del 2% real por año.

4.8 Valor Presente Actuarial

El Valor Presente Actuarial (VPA) es evaluar en una fecha determinada el costo de las obligaciones futuras que tiene el plan de pensiones hacia el participante. Las siguientes fórmulas son empleadas para la obtención del VPA de los compromisos que adquiere el patrón al momento en que un trabajador se retira.

- Retiro Normal

$$VPA = v^{g} \cdot {}_{g}p_{x}^{(T)} \cdot B \cdot \left(a + b - c\right) \tag{4. 14}$$

$$v^{g} = (1+i)^{-(g)} \tag{4. 15}$$

En donde:

$$a = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \cdot {}_{k}p_{x+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k} \right) + \frac{11}{24} \tag{4. 16}$$

$$b = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \; {}_{k}p_{y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k} \right) + \frac{11}{24} \tag{4.17}$$

$$c = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \; {}_{k}p_{x+g:y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k} \right) + \frac{11}{24} \tag{4. 18}$$

Donde:

g = Años faltantes para llegar a 30 años de servicio.

v^{g} = Valor presente de \$1 que está ***g*** periodos después.

${}_{g}p_{x}^{(T)}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x)*** sobreviva a todas las causas ***(j)*** entre edades ***(x)*** y ***(x+g)***.

${}_{k}p_{x+g}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x+g)*** llegue con vida a edad ***(x+g+k)***.

${}_{k}p_{y+g}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(y+g)*** llegue con vida a edad ***(y+g+k)***.

${}_{k}p_{x+g:y+g}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas de edades ***(x+g)*** y ***(y+g)***, ambas lleguen con vida ***k*** periodos después.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de $1 que está ***k*** periodos después.

$(1+i_{salarial})^{k-1}$ = Valor de $1 de salario en el periodo ***k-1***.

SP_{z_j} = Salario pensionable del participante ***(j)***.

r_a = En retiro normal equivale al 100%.

La interpretación de la fórmula (4.4) representa el valor presente, situado al momento de la valuación del plan, de los beneficios recibidos a partir de que el trabajador cuente con 30 años de antigüedad de manera vitalicia hasta que el beneficiario fallezca si el trabajador ya acaeció, de lo contrario hasta que muera el trabajador.

- **Retiro por Edad y Tiempo de Servicio**

$$VPA = \sum_{g=55-x}^{59-x} \left[v^{g} \ {}_{g}p_{x}^{(T)} q_{x+g}^{(T)} B \cdot \left(a_{g} + b_{g} - c_{g} \right) \right] \tag{4. 19}$$

$$a_{g} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \cdot {}_{k}p_{x+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1} \right) + \frac{11}{24} \tag{4. 20}$$

$$b_{g} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \ {}_{k}p_{y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1} \right) + \frac{11}{24} \tag{4. 21}$$

$$c_{g} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k} \ {}_{k}p_{x+g:y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1} \right) + \frac{11}{24} \tag{4. 22}$$

$$v^{g} = (1+i)^{-(g)} \tag{4. 23}$$

Donde:

g = Tiempo faltante del trabajador para llegar a la edad de 55,56,57,58 y 59 años de edad.

v^g = Valor presente de \$1 que está en el periodo ***g***.

${}_g p_x^{(T)}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x)*** sobreviva a todas las causas ***(j)*** entre edades ***(x)*** y ***(x+g)***.

$q_{x+g}^{(T)}$ = Probabilidad de salir del plan por la causa ***(j)*** dado que está expuesto a todas las causas entre la edad ***(x+g)*** y ***(x+g+1)***.

${}_k p_{x+g}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x+g)*** llegue con vida a edad ***(x+g+k)***.

${}_k p_{y+g}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(y+g)*** llegue con vida a edad ***(y+g+k)***.

${}_k p_{x+g:y+g}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas de edades ***(x+g)*** y ***(y+g)***, ambas lleguen con vida ***k*** periodos después.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está ***k*** periodos después.

$(1+i_{salarial})^{k-1}$ = Valor de \$1 de salario en el periodo ***k-1***.

SP_{z_j} = Salario pensionable del participante ***(j)***.

r_a = En retiro por edad y tiempo de servicios su equivalencia está dada por la tabla 4.1

Antigüedad	r_a
10 años	40%
11 años	42%
12 años	44%
13 años	46%
14 años	48%
15 años	50%
16 años	52.5%
17 años	55%
18 años	57.5%
19 años	60%
20 años	62.5%
21 años	65%
22 años	67.5%
23 años	70%
24 años	72.5%
25 años	75%
26 años	80%
27 años	85%
28 años	90%
29 años	95%

Tabla 4. 1 Edad y Tiempo de Servicios

Fuente: Ley del ISSSTE

La interpretación para el VPA de la fórmula (4.5) puede verse como la suma del pago de todos los beneficios anuales por jubilación, entre las edades de 55 y 59 años, contados a partir de que el participante tiene la edad de ***(x+g)*** hasta el último sobreviviente, sin importar la causa de retiro. Evaluado al momento de valuación del plan.

- **Retiro por Cesantía en Edad Avanzada**

$$VPA = \sum_{g=60-x}^{\omega-x}\left[v^g \; {}_g p_x^{(T)} q_{x+g}^{(T)} \cdot B \cdot \left(a_g + b_g - c_g\right)\right] \tag{4. 24}$$

$$v^g = (1+i)^{-(g)} \tag{4. 25}$$

$$a_g = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+i)^{-k} \cdot {}_k p_{x+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1}\right) + \frac{11}{24} \tag{4. 26}$$

$$b_g = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+i)^{-k} \; {}_k p_{y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1}\right) + \frac{11}{24} \tag{4. 27}$$

$$c_g = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(1+i)^{-k} \; {}_k p_{x+g:y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1}\right) + \frac{11}{24} \tag{4. 28}$$

Donde:

v^k = Valor presente de 1 peso que esta en el periodo ***k***.

${}_g p_x^{(T)}$ = Probabilidad de una persona sobreviva a todas las causas ***(j)*** entre edades ***(x)*** y ***(x+k)***.

$q_{x+g}^{(T)}$ = Probabilidad de salir del plan por la causa ***(j)*** dado que esta expuesto a todas las causas entre la edad ***(x+k)*** y ***(x+k+1)***.

g = Años faltantes para llegar edad de retiro.

${}_k p_{x+g}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(x+g)*** llegue con vida a edad ***(x+g+k)***.

${}_k p_{y+g}$ = Probabilidad de que una persona de edad ***(y+g)*** llegue con vida a edad ***(y+g+k)***.

${}_k p_{x+g:y+g}$ = Probabilidad de que dadas dos vidas de edades ***(x+g)*** y ***(y+g)***, ambas lleguen con vida ***k*** periodos después.

$(1+i)^{-k}$ = Valor presente de \$1 que está ***k*** periodos después.

$(1+i_{salarial})^{k-1}$ = Valor de \$1 de salario en el periodo ***k-1***.

SP_{z_j} = Salario pensionable del participante ***(j)***.

r_a = En retiro cesantía en edad avanzada su equivalencia esta dada por la tabla 4.2.

Edad	Antigüedad	r_a
60 años	10 años de servicio	40%
61 años	10 años de servicio	42%
62 años	10 años de servicio	44%
63 años	10 años de servicio	46%
64 años	10 años de servicio	48%
65 o más años	10 años de servicio	50%

Tabla 4. 2 Cesantía en Edad Avanzada

Fuente: Ley del ISSSTE

La interpretación para el VPA de la fórmula (4.5) puede verse como la suma del pago de todos los beneficios anuales por jubilación, entre las edades de 60 y ω años, contados a partir de que el participante tiene la edad de ***(x+k)*** hasta el último sobreviviente, sin importar la causa de retiro. Evaluado al momento de valuación del plan.

4.9 Cálculo de la Contribución del Patrón

La contribución del patrón se refiere a lo que, en este caso el municipio de Atlixco, tiene que ir aportando a la institución financiera que manejará el fideicomiso.

- **Retiro Normal**

$$VPA = C_a \cdot a^{(12)}_{x:\overline{30-antiguedad|}} \tag{4. 29}$$

$$C_a = \frac{VPA}{a^{(12)}_{x:\overline{30-antiguedad|}}} \tag{4. 30}$$

Donde:

VPA = Valor Presente Actuarial de los beneficios del trabajador.

C_a = Contribución anual del patron.

$a^{(12)}_{x:\overline{30-antiguedad|}}$ = Valor presente de una anualidad contingente mensual que va desde edad (x) hasta que se cumplan 30 años de servicio.

- **Retiro por Edad y Tiempo de Servicios**

$$VPA = C_a \cdot a^{(12)}_{x:\overline{59-x|}} \tag{4. 31}$$

$$C_a = \frac{VPA}{a^{(12)}_{x:\overline{59-x|}}} \tag{4. 32}$$

Donde:

VPA = Valor Presente Actuarial de los beneficios del trabajador.

C_a = Contribución anual del patrón.

$a^{(12)}_{x:\overline{59-x}|}$ = Anualidad contingente anual pagadera de manera mensual por el patrón hasta que el trabajador cumpla 59 años de edad.

- **Retiro por Cesantía en Edad Avanzada**

$$VPA = C_a \cdot a^{(12)}_{x:\overline{95-x}|} \tag{4. 33}$$

$$C_a = \frac{VPA}{a^{(12)}_{x:\overline{95-x}|}} \tag{4. 34}$$

Donde:

VPA = Valor Presente Actuarial de los beneficios del trabajador.

C_a = Contribución anual del patron

$a^{(12)}_{x:\overline{95-x}|}$ = Valor presente de una anualidad contingente anual pagadera de manera mensual por el patrón hasta que el trabajador cumpla 75 años de edad.

La contribución del patrón debe de ser mensual por tal motivo se tiene que hacer la siguiente conversión:

$$C_m = \frac{C_a}{12} \tag{4.34}$$

Donde:

C_a = Contribución anual del patrón.

C_m = Contribución mensual del patrón.

4.9.1 Contribución total del patrón

En este caso, la fórmula que se presenta a continuación representa la contribución que hará de manera total, es decir, la suma de cada una de las aportaciones que tiene que realizar para cada trabajador.

$$CT = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (4.\ 35)$$

Donde:

CT = Contribución Total del patrón.

C_i = Contribución correspondiente a cada trabajador ***i***.

n = Número de empleados existentes.

4.10 Aplicación de la metodología

4.10.1 Retiro normal

- **Salario Pensionable**

Para calcular el salario pensionable, primero se necesita saber el último salario que el trabajador va a percibir antes de que se jubile. Para ejemplificarlo, tomamos al azar un trabajador de la base de datos, ocupamos su salario neto que es de $70568.75497 anual y después se obtiene el promedio de las últimas 5 percepciones anuales antes de su retiro:

$$SP_{z_j} = \frac{\left\lfloor S_{z_j} + S_{(z-1)_j} + S_{(z-2)_j} + S_{(z-3)_j} + S_{(z-4)_i} \right\rfloor}{5}$$

$$S_{z_j} = S_{x_j}\left(1 + i_{salarial}\right)^{z_j - x_j}$$

Su edad actual es de 30 años, y cuenta con 5 años de antigüedad por lo que $x_j = 30$ y $z_j = 55$.

$$S_{55_j} = 70568.75497 * (1 + 0.02)^{55-30} = 115775.5224$$
$$S_{54_j} = 70568.75497 * (1 + 0.02)^{54-30} = 113505.4141$$
$$S_{53_j} = 70568.75497 * (1 + 0.02)^{53-30} = 111279.8178$$
$$S_{52_j} = 70568.75497 * (1 + 0.02)^{52-30} = 109097.8606$$
$$S_{51_j} = 70568.75497 * (1 + 0.02)^{51-30} = 106958.6868$$

$$SP_{55_j} = \frac{(115775.5224 + 113505.4141 + 111279.8178 + 109097.8606 + 106958.6868)}{5}$$
$$SP_{55_j} = 111323.46031$$

- **Cálculo del Beneficio**

Para el cálculo del beneficio, simplemente se obtiene el producto del salario pensionable por un porcentaje que depende de la forma de retiro, en este caso es el 100%.

$$B = SP_{z_j} \cdot r_a$$

$$B = 111323.4604 * 100\% = 111323.4604$$

- **Valor Presente Actuarial**

En esta parte se requiere la edad del cónyuge, sus probabilidades de sobrevivencia y las probabilidades del trabajador de permanecer dentro del grupo. La edad del cónyuge para este caso es de 28 años y las probabilidades de ambos se encuentran en el anexo I.

$$VPA = v^{g} \cdot {}_{g}p_{x}^{(T)} \cdot B \cdot \left(a + b - c\right)$$

$$v^{25} = (1.035)^{-25} = 0.423147$$

$$_{25}\,p_{30}^{(T)} = 0.52837766$$

$$a = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k} \cdot {}_{k}p_{x+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1}\right) + \frac{11}{24}$$

$$a = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+0.0035)^{-k} \cdot {}_{k}p_{55} \cdot (1+0.02)^{k-1}\right) + \frac{11}{24} = 21.2476$$

$$b = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k}\ {}_{k}\,p_{y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1}\right) + \frac{11}{24}$$

$$b = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+0.02)^{k-1} \cdot {}_{k}p_{53} \cdot (1+0.035)^{-k}\right) + \frac{11}{24} = 24.7428$$

$$c = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k}\ {}_{k}\,p_{x+g:y+g} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1}\right) + \frac{11}{24}$$

$$c = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+0.035)^{-k} \cdot {}_{k}p_{55,53} \cdot (1+0.02)^{k-1}\right) + \frac{11}{24} = 18.6804$$

$$\begin{aligned}
VPA &= v^{g} \cdot {}_{g}p_{x}^{(T)} \cdot B \cdot \left(a + b - c\right) \\
VPA &= .423146 \cdot .528377 \cdot 111323.4603 \cdot \left(21.2476 + 24.7428 - 18.6804\right) \\
VPA &= 679743.6139
\end{aligned}$$

- **Cálculo de la Contribución**

Para calcular la contribución sólo falta conocer el valor de la anualidad temporal a 25 años del trabajador de edad 30.

$$C_a = \frac{\text{VPA}}{a^{(12)}_{x:\overline{30-antiguedad}|}}$$

$$a^{(12)}_{30:\overline{30-5}|} = \left(\sum_{k=1}^{25}(1+0.035)^{-k}\ {}_k p_{30}\right) + \frac{11}{24} = 12.8865$$

$$C_a = \frac{679743.6139}{12.8865} = 52748.4158$$

De acuerdo a estos resultados implica que el patrón tiene que aportar \$52,748.4158 anuales durante los siguientes 25 años, para que el trabajador de este ejemplo reciba una pensión equivalente a \$ 111,323.4603 anuales, durante el primer año de retiro, e incrementándose en los próximos años a una tasa anual del 2% real. Una vez que se muere el trabajador los pagos serán dirigidos al cónyuge, si es que existe, hasta que éste muera.

4.10.2 Retiro por Edad y Tiempo de Servicios

- **Salario Pensionable**

En este tipo de retiro se tiene que tomar en cuenta que el trabajador se puede retirar cuando este entre los 55 y 59 años de edad y una antigüedad mínima de 10 años y una máxima de 29. La metodología es parecida a la del retiro normal, solo que aquí se contempla la probabilidad de que el trabajador se retire a los 55, 56, 57, 58 o 59 años de edad. Para calcular el salario pensionable se tiene que obtener el promedio de los últimos 5 años para todas las edades antes mencionadas. Para ejemplificarlo tomamos otro trabajador el cual tiene 29 años y percibe $43,767.2818 de manera anual.

A los 55 años.

$$
\begin{aligned}
S_{55_j} &= 43767.2818 \cdot (1+0.02)^{55-29} = 73240.96231 \\
S_{54_j} &= 43767.2818 \cdot (1+0.02)^{54-29} = 71804.86501 \\
S_{53_j} &= 43767.2818 \cdot (1+0.02)^{53-29} = 70396.92648 \\
S_{52_j} &= 43767.2818 \cdot (1+0.02)^{52-29} = 69016.59459 \\
S_{51_j} &= 43767.2818 \cdot (1+0.02)^{51-29} = 67663.32803
\end{aligned}
$$

$$SP_{55_j} = 70424.53528$$

A los 56 años. $SP_{56_j} = 71833.02599$

A los 57 años en adelante ya no se hacen los cálculos debido a que la edad actual es de 29 y tiene una antigüedad de 2 años, entonces cuando tenga 57 años tendrá una antigüedad de 30 años y con ese periodo de servicios ya pertenece a otro tipo de plan.

- **Cálculo del Beneficio**

Cuando un trabajador se sale del grupo por esta forma de retiro, no le corresponde un 100% de su salario pensionable, sino, que va a depender de su antigüedad el porcentaje que va a recibir, este oscila entre un 40% y un 95%.

Si se retira a los 55: $B = 70424.53528 \cdot 90\% = 63382.08175$

Si se retira a los 56: $B = 71833.02599 \cdot 95\% = 68241.37469$

- **Valor Presente Actuarial**

$$VPA = \sum_{g=55-x}^{59-x} \left[v^{g} \, {}_{g}p_{x}^{(T)} q_{x+g}^{(T)} B \cdot \left(a_{g} + b_{g} - c_{g} \right) \right]$$

Para el trabajador a la edad de 55:

$$v^{26} = (1.035)^{-26} = 0.0029217$$

$${}_{26}p_{29}^{(T)} = 0.9436523$$

$$q^{(T)}_{29+26} = 0.0141$$

$$a_{55-x} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k} \cdot {}_k p_{x+55-x} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1} \right) + \frac{11}{24}$$

$$a_{55-29=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+0.035)^{-k} \cdot {}_k p_{55} \cdot (1+0.02)^{k-1} \right) + \frac{11}{24} = 21.2476$$

$$VPA = v^{26} \, {}_{26} p_{29}^{(T)} q_{29+26}^{(T)} \cdot 63382.08175 \cdot \left(a_{26} + b_{26} - c_{26} \right) = 3934.7622$$

Para el trabajador a la edad de 56:

$$v^{27} = (1.035)^{-27} = 0.00307872$$

$${}_{27} p_{29}^{(T)} = 0.498975948$$

$$q^{(T)}_{29+27} = 0.015620$$

$$a_{56-x} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k} \cdot {}_k p_{x+56-x} \cdot (1+i_{salarial})^{k-1} \right) + \frac{11}{24}$$

$$a_{56-29=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1+0.035)^{-k} \cdot {}_k p_{56} \cdot (1+0.02)^{k-1} \right) + \frac{11}{24} = 20.6826$$

$$VPA = v^{27}\ {}_{27}p_{29}^{(T)} q_{29+27}^{(T)} \cdot 68241.37469 \cdot \left(a_{27} + b_{27} - c_{27}\right) = 4345.3560$$

En este caso el trabajador no cuenta con cónyuge, por lo que no se calcula el término *b* ni *c* ya que son igual a 0.

$$VPA = \sum_{g=55-x}^{59-x} \left[v^g\ {}_g p_x^{(T)} q_{x+g}^{(T)} B \cdot \left(a_g + b_g - c_g\right)\right] = 3934.7622 + 4345.35$$
$$VPA = 8280.1189$$

- **Cálculo de la Contribución**

En el cálculo de la contribución es necesario realizar una anualidad temporal a 59 – x, es decir, a los años que le falte al trabajador para llegar a la edad de 59.

$$C_a = \frac{\text{VPA}}{a_{x:\overline{59-x}|}^{(12)}}$$

$$a_{29:\overline{59-29}|}^{(12)} = a_{29:\overline{59-29}|} + \frac{12-1}{2(12)}$$

$$a_{29:\overline{59-29}|}^{(12)} = 13.72994$$

$$C_a = \frac{8280.189}{13.72994} = 603.069952$$

Los resultados anteriores significan que el patrón tiene que aportar $603.069952 anuales durante los siguientes 27 años, para que el trabajador reciba una pensión equivalente a $28,374.92 a pesos de hoy de forma anual.

Análogamente se realizan las operaciones para la forma de retiro de cesantía y edad avanzada, sólo cambia el intervalo de retiro. En retiro por edad y tiempo de servicios es de 55 a 59 años y se suple por el de 60 a 95 años de edad.