CAPITULO IV. MODELO BINOMIAL

En IV.1 se desarrolla el modelo binomial desde un enfoque teórico con el fin de analizar la forma en que se obtiene la prima de una opción call. A continuación en IV.2 se propone un ejemplo del modelo binomial con la intención de realizar la aplicación hacia el riesgo de crédito hipotecario. Por ultimo en el apartado IV.3 se obtendrá el valor de la Prima por medio del Modelo Binomial,

IV.1 Modelo Binomial

El modelo binomial es un modelo discreto que nos permite observar el comportamiento de las acciones a través del tiempo. Suponiendo que el precio de la acción en el momento t se denote por S el modelo binomial establece que dicha acción tiende a comportarse de 2 formas. Por una parte, una vez transcurrido el intervalo de tiempo Δt (árbol binomial a 1 paso), S puede subir hacia Su ó puede bajar al precio Sd como se observa en la figura 4.1.

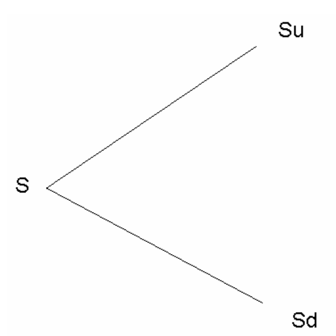

Figura 4.1: Movimiento de S (activo subyacente) en Δt

Fuente: Elaboración Propia.

Sin embargo, el modelo se vuelve más complicado cuando se habla del periodo $2\Delta t$ (árbol binomial a 2 pasos), pues como se observa en la figura 4.2 las posibilidades para

S aumentan a 3. Cuando se llega al periodo 3Δt (árbol binomial a 3 pasos), S cuenta con 4 diferentes alternativas como se muestra en la figura 4.3 y así sucesivamente a medida que pasa el tiempo el árbol va aumentando a n pasos y arrojando n+1 salidas para S.

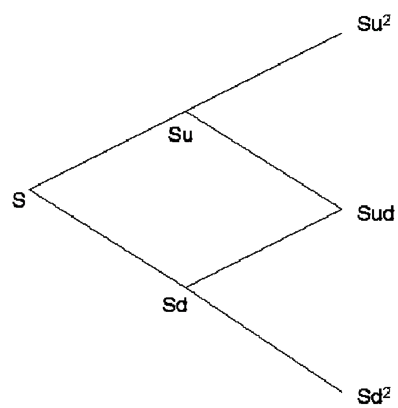

Figura 4.2: Movimiento de S (activo subyacente) en 2Δt

Fuente: Elaboración Propia.

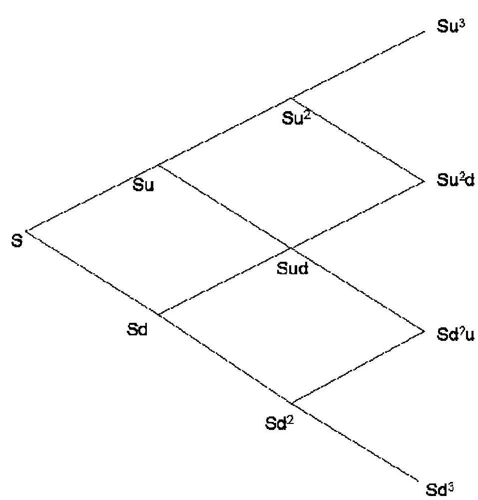

Figura 4.3: Movimiento de S (activo subyacente) en 3Δt

Fuente: Elaboración Propia.

IV.1.1 Modelo Binomial a un Paso

Las opciones son utilizadas en el ámbito financiero como una protección para los compradores de acciones. Existen conceptos importantes relacionados con opciones que se mencionan a continuación:

Precio de la acción: es el precio al que se encuentra en el mercado una determinada acción el día de hoy.

Precio de ejercicio: es el precio al que se pacta comprar las acciones en una fecha futura.

Precio futuro de la opción: es el precio de la opción en una fecha futura y que por obvias razones es incierto.

Una opción call es utilizada para que un comprador de acciones de alguna manera este protegido ante un aumento del precio futuro de las acciones. Dada esta incertidumbre, se establecen dos escenarios que muestran las situaciones a las que se puede enfrentar el comprador de acciones. Estos escenarios se ejemplifican en la figura 4.4.

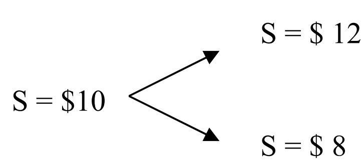

Figura 4.4: Movimiento de los precios del activo subyacente

Fuente: Elaboración Propia.

El primer escenario muestra que la acción sube de precio, mientras que el segundo escenario ilustra lo contrario. El comprador de opciones para tener más certidumbre va a pactar un precio al cual comprará las acciones en el futuro, este precio es el precio de ejercicio. Sea para el ejemplo ilustrado en la figura 4.4 que el precio de ejercicio es 11. Por este derecho el comprador va a pagar una cantidad denominada prima, esta prima le da derecho a comprar las acciones de su interés al precio de ejercicio independientemente del valor al que se encuentre en el mercado. En caso de que el precio de mercado de la acción sea menor que el precio de ejercicio, el comprador de la opción no ejercerá su derecho. Pero, ¿cuál es el valor de la prima que debe cobrar la contraparte al comprador de la opción?

El valor de la prima tendrá que ver con la diferencia entre el valor del activo subyacente en el futuro menos el precio de ejercicio, traída a valor presente. En caso de que la diferencia sea negativa se considera que el valor de la prima es igual a 0. La figura 4.5 ilustra estos valores, denotando el valor de la prima como f_1 en caso de que el valor de la acción en un futuro aumente y f_2 en caso de que el valor de la acción disminuya.

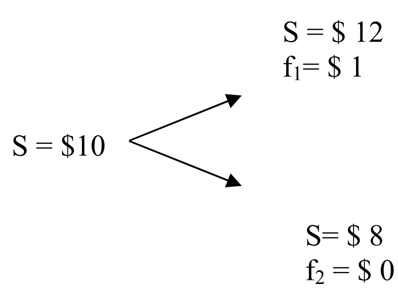

Figura 4.5: Precio de la opción call en los dos casos posibles.

Fuente: Elaboración Propia.

Es importante destacar que las diferencias de precios analizadas en la figura 4.5 son observadas con una fecha focal futura; sin embargo, se necesita tener conocimiento de esas diferencias en una fecha actual. Para tal motivo es necesario introducir el concepto de λ, el cual es el número o proporción de acciones con las que debe contar la persona interesada en vender la opción call formando un portafolio, el cual se constituye con la venta de un call y la posesión de λ acciones, de tal forma que, cuando el activo subyacente disminuye a \$ 8, el valor de la proporción de la acción es 8λ y el valor de la opción call es cero (figura 4.5), por lo que el valor del portafolio es 8λ - 0, mientras que si el precio el activo subyacente aumenta a \$ 12, el valor de la proporción de la acción es 12λ y el valor de la opción call es \$1, por lo que el valor del portafolio es 12λ -1. Es importante aclarar que el valor de la opción call se resta ya que para el vendedor de la opción call, que en este caso será la compañía aseguradora, representa una obligación, es decir un pasivo. Para obtener el portafolio libre de riesgo se igualan estas dos ecuaciones, y se obtiene el valor de λ. Como se muestra a continuación:

$$12\lambda - 1 = 8\lambda - 0 \tag{4.1}$$

$$\lambda = .25$$

Una vez que se ha obtenido λ, se vuelve una labor muy sencilla obtener el precio del portafolio ya que, si el precio el activo subyacente aumenta a \$ 12 el valor del portafolio al sustituir λ es igual a 2, y si el precio del activo subyacente disminuye a \$ 8, el valor del portafolio también es igual a 2. Como podemos observar no importa hacia donde se mueva el precio del activo subyacente, el valor del portafolio es 2 al vencimiento.

Es importante destacar que no existen oportunidades de arbitraje, es decir, de comprar opciones a precio menor o venderlas a un precio superior. Aunado a que se conoce el precio del portafolio al final del periodo se puede calcular el valor presente de dicho portafolio con la tasa libre de riesgo.

Dado que se está figurando el portafolio con fecha focal un periodo después (Δt), es importante aclarar que se necesita conocer el valor de dicho portafolio el día de hoy, por lo tanto, se obtiene el valor presente por medio de la fórmula (4.2)

$$(Su\lambda - f_1)e^{-i\Delta t} = f^* \qquad (4.2)$$

Donde:

Δ t = Longitud del periodo que en este caso es cada cuatro meses

Su= Valor del activo subyacente al finalizar el periodo Δt

λ = Proporción de acciones

f_1= Precio de la opción call con fecha focal Δ t periodos en el futuro

f^*= Precio del portafolio con fecha focal el día de hoy

i= Tasa libre de riesgo

Bajo el supuesto de que la tasa libre de riesgo es 12% anual y sustituyendo los valores respectivos de la fórmula 4.2 se obtiene el valor presente del portafolio que corresponde al que se ilustra a continuación:

$$2e^{-.12\left(\frac{4}{12}\right)} = 1.92 \qquad (4.3)$$

Retomando la figura 4.4 se tiene que el precio del activo subyacente el día de hoy es igual a $10. Así la prima ó precio de la opción que será denotada por *f*, se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$S\ \lambda - f = f^* \qquad (4.4)$$

Donde:

S= Valor del activo subyacente con fecha focal el día de hoy

λ= Proporción de acciones

f^*= Precio del portafolio con fecha focal el día de hoy (ver fórmula 4.2)

f= Precio de la opción call con fecha focal el día de hoy

Como ya se explicó con anterioridad, se resta el precio del call, ya que en el portafolio se tiene la venta del call, y representa un pasivo para el que toma la posición corta.

Dado que la fórmula 4.4 muestra el procedimiento de manera general, finalmente se sustituyen los valores correspondientes que permitirán obtener la prima.

$$10 * .25 - f = 1.92 \tag{4.5}$$

$$f = .58$$

Se concluye este apartado haciendo notar que el valor de la opción call hoy es de \$.58 a un paso.

IV.1.2 Cálculo de la Prima a Través de Probabilidades Implícitas a Un Paso

En esta sección se pretende generalizar el cálculo de la prima a través de probabilidades implícitas.

Se sabe que el valor de λ hace que un portafolio quede libre de riesgo. Si hubiera un movimiento hacia arriba en el precio de la acción, el valor del portafolio al final sería $Su\lambda - f_2$, y si hubiera un movimiento hacia abajo en el precio de la acción este sería $Sd\lambda - f_3$. Si igualamos las dos ecuaciones:

$$Su\lambda - f_2 = Sd\lambda - f_3 \tag{4.6}$$

Despejando

$$\lambda = \frac{f_2 - f_3}{Su - Sd} \tag{4.7}$$

Con esta λ se obtiene el portafolio libre de riesgo y éste debe crecer a la tasa libre de riesgo. La ecuación (4.7) muestra que λ es la razón de cambio en el precio de las opciones, de acuerdo a los cambios en el precio de las acciones, conforme nos vamos moviendo entre los nodos en el tiempo *T*.

Si en la igualdad de la fórmula (4.4) se sustituye el valor de λ de la fórmula (4.7) quedaría de la siguiente manera:

$$S\left(\frac{f_2 - f_3}{Su - Sd}\right) - f = \left((Su)\frac{f_2 - f_3}{Su - Sd} - f_2\right)e^{-rT} \tag{4.8}$$

Realizando algunas simplificaciones como se muestra en el apéndice al final de esta tesis, esta ecuación se reduce a:

$$uf - df = f_2 - f_3 - df_2e^{-rT} + uf_3e^{-rT} \tag{4.9}$$

Sumamos y restamos df_3e^{-rT} de la ecuación anterior:

$$uf - df = f_2 - f_3 - df_2e^{-rT} + uf_3e^{-rT} - df_3e^{-rT} + df_3e^{-rT} \tag{4.10}$$

Realizando algunas simplificaciones como se muestra en el apéndice al final de esta tesis, esta ecuación se reduce a:

$$f = e^{-rT}\left[\left(\frac{e^{rT} - d}{u - d}\right)f_2 + \left(1 - \frac{e^{rT} - d}{u - d}\right)f_3\right] \tag{4.11}$$

Considerando que $p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d}$, entonces (4.12)

$$f = e^{-rT}\left[pf_2 + (1 - p)f_3\right] \tag{4.13}$$

De la fórmula 4.12 d representa el factor de disminución y u el factor de incremento, con respecto al precio.

Para el ejemplo anterior tendríamos:

u = S_u/S = 12/10 = 1.2

d = S_d/S = 8/10 = .8

Y con los datos del ejemplo anterior quedaría:

$$p = \frac{e^{.12(4/12)} - .8}{1.2 - .8} = .602 \tag{4.14}$$

Por lo que podemos concluir que la probabilidad de que suba el activo subyacente es de .602 y de que baje seria el complemento (1-p)=.398

Por otro lado si aplicamos la fórmula 4.13 con los datos del ejemplo descrito en la sección anterior, es decir con f_1=1 y f_2=0, con τ=4/12 y con r=12%, y con la p obtenida en la ecuación 4.14 obtendríamos:

$$f = e^{-(0.12)(4/12)}(0.602 * 1 + 0.398 * 0) = .58$$

Resultado que coincide con el obtenido en la sección anterior.

IV.1.3 Modelo Binomial a Tres Pasos

Durante este apartado se explica el modelo binomial a 3 pasos; sin embargo cabe aclarar que no se desarrolla el modelo binomial a 2 pasos pues es muy semejante al modelo a un paso y debido a su simplicidad se considera trivial el explicarlo.

Ahora se explica qué pasaría cuando el árbol binomial es a tres pasos: se comenzará observando lo que puede ocurrir con el activo subyacente en tres periodos, es decir, este puede aumentar o disminuir como se muestra en la Figura 4.6

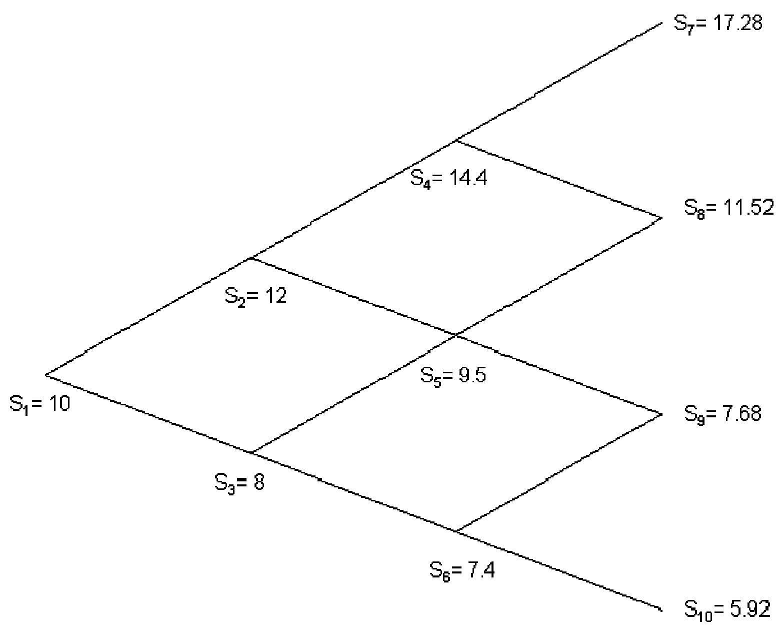

Figura 4.6: Movimiento de los precios del activo subyacente a tres pasos.

Fuente: Elaboración Propia.

Este árbol binomial es a 3 pasos por lo que contiene 4 salidas que están denotadas por S_7, S_8, S_9 y S_{10}. Los valores que se observan contiguamente a cada una de estas salidas fueron calculados de acuerdo a una tasa del 20% y se siguió el mismo procedimiento utilizado para obtener el árbol binomial a un paso como se observa en la figura 4.4

El objetivo siguiente es calcular la prima para el árbol binomial a 3 pasos de manera semejante como se hizo con el árbol binomial a un paso. Primeramente se considera que el precio de ejercicio es igual a \$11, y se procede a obtener el valor de la opción al vencimiento para las 4 salidas del árbol binomial a 3 pasos. Dichos valores de las opciones serán \$6.28, \$.52, \$0, \$0 las cuales serán denotadas por f_7, f_8, f_9, f_{10} respectivamente En la Figura 4.7 se observan los valores de estas salidas representados por las letras F, G, H, I.

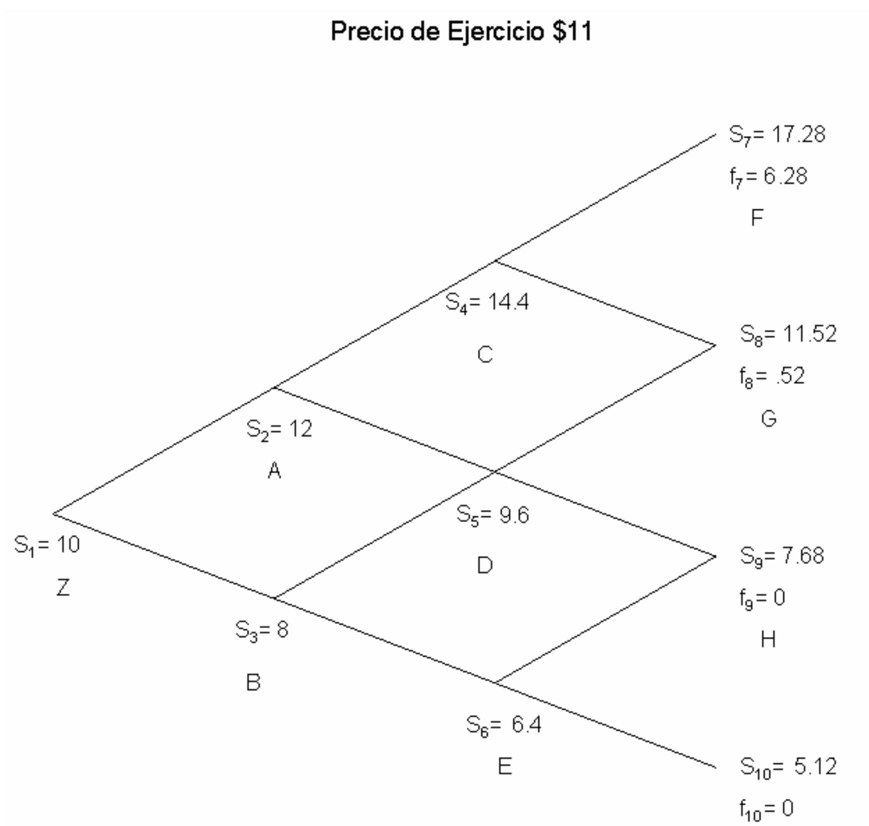

Figura 4.7: Movimiento de los precios de la opción call a 3 pasos.

Fuente: Elaboración Propia.

El modelo binomial a 3 pasos proporciona una amplia gama de posibilidades ó combinaciones de acuerdo al comportamiento del activo subyacente y el tiempo. Se tiene que en el tiempo Δt el precio del activo subyacente tendrá 2 posibilidades, haber experimentado un aumento, el cual era denotado con Su y que en lo posterior será simplemente (1). Por otra parte S puede sufrir una disminución que solía ser expresada para fines del ejemplo con Sd y que será denotado de ahora en adelante por (0). Esta analogía se puede observar en la figura 4.8.

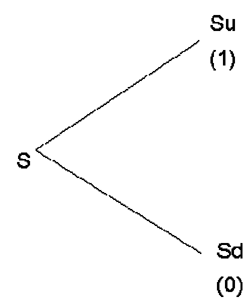

Figura 4.8: Ilustración de la analogía del aumento y disminución del activo subyacente.

Fuente: Elaboración Propia.

A medida que el tiempo transcurre, en el momento $2\Delta t$ se observará un gran número de posibilidades obtenidas debido al comportamiento del activo subyacente. Sea el caso de que S haya obtenido un valor de 1 (aumento) en Δt entonces S tendrá dos posibilidades para el momento $2\Delta t$, disminuir ó aumentar dependiendo del caso. Por el lado contrario cuando S en el momento Δt obtiene un valor de 0 (disminución), en $2\Delta t$ tendrá las mismas posibilidades que en el caso anterior. Sin embargo, el caso (0,1) y (1,0), es decir que aumente y disminuya ó que disminuya y aumente es el mismo, pues como se puede observar en el árbol binomial, ambos apuntan a la misma dirección. Ver figura 4.9

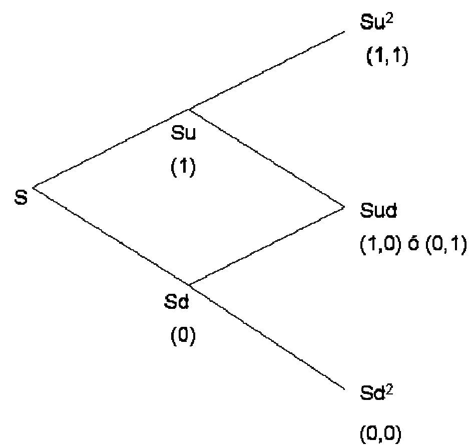

Figura 4.9: Analogía a dos pasos.

Fuente: Elaboración Propia.

El transcurso de S a lo largo de los periodos de tiempo t, Δt, 2Δt desata un gran número de posibilidades que como se observa se comportan de manera binomial. Se llega al caso en que S avanza al periodo 3Δt que refleja 4 salidas distintas provenientes de 2Δt. Obsérvese que (1,1,0) , (1,0,1) y (0,1,1) apuntan a la misma dirección, al igual que (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) como se aprecia en la figura 4.10

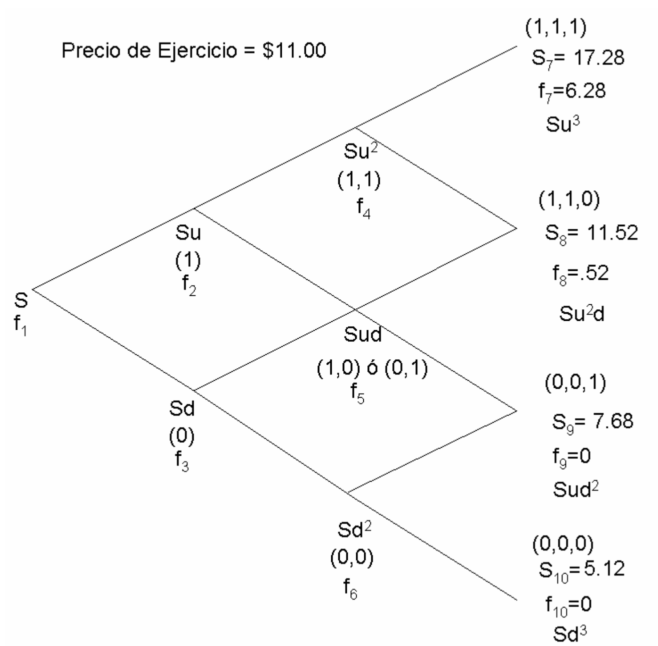

Figura 4.10: Analogía a tres pasos.

Fuente: Elaboración Propia.

Este árbol a 3 pasos puede calcularse análogamente al de 1 paso como se encuentra señalado, ya que cada nodo del penúltimo periodo representa un pequeño árbol a 1 paso independientes del resto y de esta manera ir calculando hacia atrás los precios sucesivamente hasta llegar al nodo inicial.

El tiempo seguirá su curso y el interés se enfoca en descubrir el precio de la opción call en el tiempo t, para lo cuál es necesario obtener el precio de la misma en cada uno de los periodos (Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$).

Para comprender mejor como se obtendrá el precio actual de la opción call a 3 pasos, Figura 4.7 primeramente se obtendrá la diferencia entre el valor del activo subyacente menos el valor del precio de ejercicio para cada una de las 4 diferentes trayectorias ubicadas en el tiempo $3\Delta t$ es decir (111), (110), (100), y (000). Por ejemplo, para el camino (111) el precio de la opción en $3\Delta t$ es 17.28 y el precio de ejercicio es 11, por lo tanto el valor de la opción es de 6.28 y se denota con f_7. Observar la figura 4.10

En la figura 4.10 se observa que se puede llegar a Sud^2 a través de varios caminos, es decir (110) ó (101) ó (011); sin embargo, de ahora en adelante se tomará, para hacer referencia a esta trayectoria, únicamente el camino que realice su primer movimiento hacia arriba; así, para referenciar a Sud^2 se utilizará a (110), para apuntar a Sd^2u se tomará a (100).

Posteriormente se encontrará el valor para el precio de la opción call en el tiempo $2\Delta t$, esto se realizará de la siguiente forma:

Como se hizo para el caso del método binomial a 1 paso lo primero es igualar los dos portafolios para obtener λ, quedando:

$$17.28\lambda - 6.28 = 11.52\lambda - .52 \tag{4.15}$$

$$\lambda = 1$$

Sustituyendo λ en cada cualquiera de las ecuaciones obtenemos que el valor del portafolio es de 11, pero ahora es necesario traerlo a valor presente por lo que ocuparemos la fórmula (4.2), y sustituyendo los valores obtenidos en este ejemplo nos quedaría:

$$11e^{-.12\left(\frac{4}{12}\right)} = 10.57 \tag{4.16}$$

Por último sustituimos el valor del portafolio en la fórmula (4.4), para obtener el precio de la opción call, como se muestra a continuación:

$$(14.4 * 1) - f = 10.57 \tag{4.17}$$

$$f = 3.83$$

Haciendo una semejanza entre los puntos CFG, con los que acabamos de calcular el valor de la opción call f_4, el cual es de 3.83 como se ratifica en la figura 4.11, se calcularán los valores de los puntos DGH y EHI obteniendo los valores de f_5 y f_6.

Para obtener el valor de f_2 se utilizarán los valores de f_4 y f_5 de manera análoga a como se calculó f_4 explicado con detalle anteriormente. Se calculará f_3 con los valores de f_5 y f_6.

Se realiza un procedimiento semejante en Δt y de los puntos ACD se obtiene f_2, *de BDE* f_3. El procedimiento culmina cuando se halla el valor de f_1 que si se ha seguido el procedimiento correctamente, éste es el valor actual de la opción call, para este caso es de 1.41, lo que se encuentra plasmado en la figura 4.11

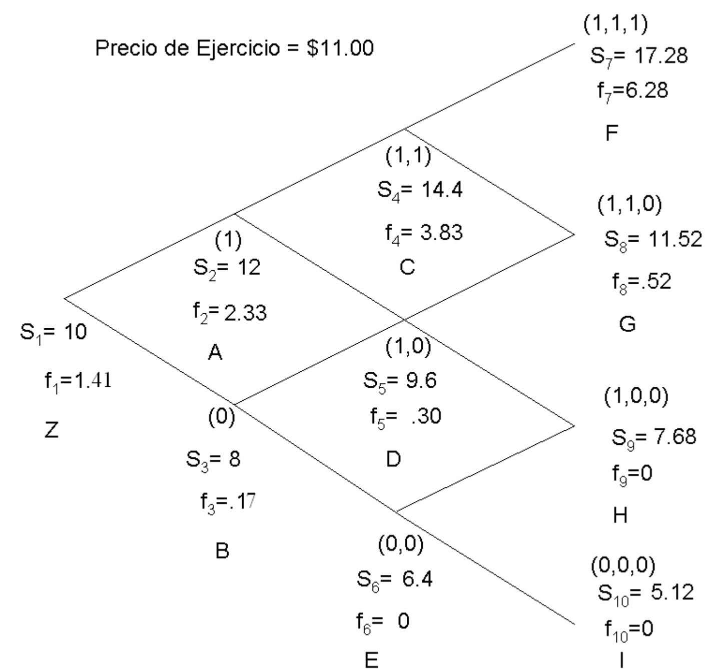

Figura 4.11: Valor del Activo Subyacente y de la prima en cada paso.

Fuente: Elaboración Propia.

IV.1.4 Cálculo de la Prima a Través de Probabilidades Implícitas a Tres Pasos

Para realizar el cálculo de la prima a través de probabilidades implícitas primero que nada es necesario calcular la p, al sustituir los valores de cada nodo en la fórmula (4.12). A continuación se muestra un ejemplo de cómo obtener dicha probabilidad para el primer nodo CFG.

$$u = \frac{17.28}{14.4} = 1.2 \qquad\qquad d = \frac{11.52}{14.4} = .8$$

$$p = \frac{e^{.12(4/12)} - .8}{1.2 - .8} = .602$$

Como se puede notar u y d se mantienen constantes durante todo el árbol binomial por lo que nodo a nodo el cálculo de la probabilidad (p=.062) se mantiene constante.

Las primas se pueden obtener, mediante la aplicación de la fórmula 4.13, pero para el caso de tres pasos varia la metodología, ya que ahora tenemos 4 salidas (f_7, f_8, f_9 y f_{10}) y será necesario multiplicar cada una por la probabilidad de llegar a ese punto.

Para el primer caso solo existe un camino, es decir**,** que para llegar a f_7 solo se puede llegar cuando en los tres periodos sube (1,1,1) con probabilidad p, por lo que para llegar a este nodo será necesario multiplicar $f_7 * p^3$.

Para la segunda salida existen 3 caminos diferentes: es decir que en el primer y segundo periodo haya subido y en el tercero haya bajado (1, 1,0), o que haya subido en el primero, bajado en el segundo y subido en el tercero (1, 0,1), o que haya bajado en el primer periodo y subido en el segundo y tercer periodo (0, 1,1), pero las tres posibilidades nos llevan a la misma f_8. Al calcular la probabilidad de llegar a este punto en los tres casos será multiplicar $p^2(1-p)$, por lo que para llegar a este nodo multiplicaremos $f_8 * 3\ p^2(1-p)$.

Para el caso de la tercera salida existen también 3 caminos diferentes: es decir, que en el primer periodo haya subido, y en el segundo y tercer periodo haya bajado (1,0,0), o que haya bajado en el primero, subido en el segundo y bajado en el tercero (0,1,0), o que haya bajado en el primer y segundo periodo y subido en el tercer periodo (0,0,1), pero las tres posibilidades nos llevan a la misma f_9. Al calcular la probabilidad de llegar a este punto en los tres casos será multiplicar $p(1-p)^2$, por lo que para llegar a este nodo multiplicaremos $f_9 * 3\ p(1-p)^2$.

Por último en la cuarta salida solo existe un camino para llegar al nodo f_{10}, es decir que en los 3 periodos se haya presentado una disminución (0,0,0) con probabilidad (1-p), por lo que para llegar a este nodo será necesario multiplicar $f_{10} * (1-p)^3$.

De esta manera podemos obtener la prima trayendo a valor presente la suma de estas probabilidades multiplicadas por el valor de f en cada nodo, es decir el valor esperado, quedando:

$$f_1 = e^{-r3T}\left[p^3 f_7 + 3p^2(1-p)f_8 + 3p(1-p)^2 f_9 + (1-p)^3 f_{10}\right] \qquad (4.18)$$

Por otro lado si aplicamos la fórmula 4.18 con los datos del ejemplo descrito en la sección anterior, es decir con f_7=6.28, f_8=.52, f_9=0 y f_{10}=0, con τ=4/12 y con r=12%, y con la p=.602 se obtendría:

$$f_1 = e^{-(.12)3(4/12)}\left[(.602)^3 * 6.28 + 3(.602)^2(1-.602) * .52 + 3(.602)(1-.602)^2 * 0 + (1-.602)^3 * 0\right]$$

$$f_1 = 1.41$$

Valor que coincide con el obtenido en la sección anterior, por lo que para futuros ejemplos será indistinto el método a ocupar para el cálculo de la prima.

IV.2 Ejemplificación del Árbol Binomial

Cabe destacar que el modelo binomial se ha utilizado, durante el desarrollo de la tesis, como una herramienta que sirve únicamente para modelar el comportamiento de las acciones; sin embargo, dicho modelo es funcional en varios ámbitos si se realiza la analogía correcta.

Para el caso de la presente tesis se comenzará por mencionar que el valor del activo subyacente es el saldo insoluto del cliente que se encuentra pagando un crédito hipotecario. Los pasos del árbol binomial describen la periodicidad del pago del crédito hipotecario, además de que las diversas ramas del árbol detallan todas las posibles situaciones de pago e impago a las que se puede enfrentar el banco. De esta forma la institución bancaria es quien compra la opción call, es decir, que paga una prima a la compañía aseguradora, vendedora del call.

Para dar una aplicación real del árbol binomial se propone utilizar dicho árbol para una deuda de 10 años, que se planea pagar mensualmente, por lo que se tratará con un árbol a 120 pasos.

Se comenzará por implantar dicha herramienta para ejemplificar el comportamiento de una deuda de 120 pagos, con la finalidad de obtener la prima que una institución aseguradora debería cobrarle al banco por la cobertura del riesgo de impago de un crédito hipotecario.

Para la realización del ejemplo se procesan los datos de la tabla 4.1 para obtener el pago mensual que se ocupará, junto con la deuda y el plazo, como variables para desplegar el árbol binomial, quien arrojará los saldos insolutos.

Deuda	\$500,000.00
T	10 años
SA	\$100,000.00
X	\$6,424.34
$i_{(anual)}$	10%

Tabla 4.1: Datos del ejemplo a 120 pasos

Fuente: Elaboración Propia.

IV.2.1 Cálculo de los Saldos Insolutos

En el presente apartado se desarrollará la manera en como se comportan los saldos insolutos mediante el método binomial; se parte de los siguientes supuestos.

1. En el método binomial solo existirán dos posibilidades en cada periodo: realizar el pago o no realizarlo. Es decir, que si se realiza el pago el saldo

insoluto tendrá que descender y de lo contrario tan solo se acumulará con los intereses respectivos del periodo.

2. El cálculo de los intereses se realiza por interés compuesto.
3. En cada paso se puede realizar únicamente el pago de un periodo, no importando el número de pagos atrasados que tenga.
4. En caso de incumplimiento de alguno de los pagos, los pagos posteriores no exentan aquellos que se dejaron de realizar, por lo tanto si el individuo dejó de pagar diez periodos y paga el siguiente, este abono se tomará forzosamente como pago del primer periodo con los intereses generados. Retomando la situación en que el individuo deje de pagar 10 periodos y realice el pago del onceavo periodo, aparte de que este pago se le tomará en cuenta para el primer periodo se le sumarán los intereses generados por los 10 periodos de incumplimiento. Cabe aclarar que si el individuo realiza el pago éste debe ser en su totalidad, es decir, con todo e intereses.

Por ejemplo, por una deuda de \$30,000.00 se pagarán 3 pagos anuales de \$12,063.44 con un interés del 10%, el monto del pago fue calculado de acuerdo a la fórmula:

$$X = \frac{V_0}{a_{\overline{3|}.10}} \tag{4.19}$$

La gráfica del primer periodo quedaría de la siguiente manera:

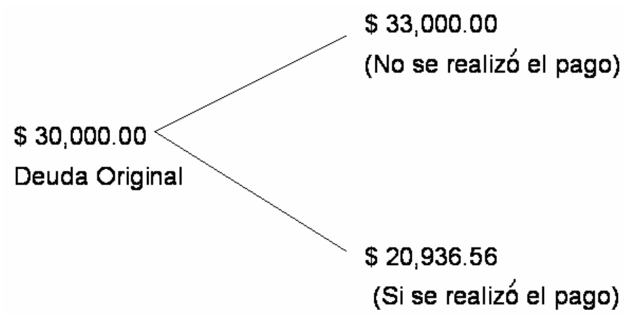

Figura 4.12: Valor del Saldo Insoluto después de un paso
Fuente: Elaboración Propia.

Como se aprecia en la figura 4.12 estas son las dos opciones que se pueden experimentar durante el primer periodo, es decir, que de no realizarse el pago lo único que ocurriría seria que la deuda original se acumularía junto con los intereses del periodo. El resultado de esta situación numéricamente viene dado por la fórmula.

$$30,000(1.10)=33,000 \tag{4.20}$$

De otra forma, si el pago fuera realizado la deuda original se llevaría un periodo y se le restaría el abono realizado en el periodo correspondiente, lo cual se muestra a continuación:

$$30,000(1.10)-12,063.44= 20,936.56 \tag{4.21}$$

Siguiendo esta metodología el segundo periodo tendría una apariencia como la que se muestra en la figura 4.13

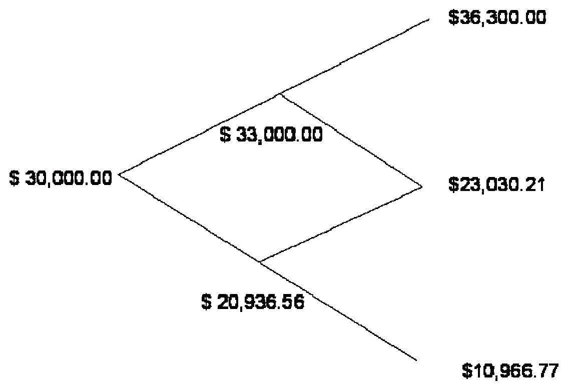

Figura 4.13: Valor del Saldo Insoluto después de dos pasos.

Fuente: Elaboración Propia.

Se parte del caso en el que no se realizó el pago correspondiente al primer periodo, en donde el saldo insoluto es de $33,000, por lo que de no realizar el pago en el segundo periodo tan solo se acumula el saldo insoluto con los intereses correspondientes al siguiente periodo. Este nuevo saldo insoluto es calculado como se muestra a continuación:

$$33{,}000(1.10)=36{,}300 \tag{4.22}$$

Por otro lado si se realiza el pago, el saldo insoluto actual (33,000) debe llevarse un periodo y se le debe restar el abono correspondiente con los intereses del primer periodo generados por la falta de pago puntual en dicho periodo. Esta situación quedaría:

$$33{,}000(1.10)-12{,}063.44\,(1.10)=23{,}030.21 \tag{4.23}$$

Ahora partiendo de que en el primer periodo se realizó el pago, es decir, que el saldo insoluto es de $20,936.56 existen 2 posibilidades: que el individuo realice su pago ó no. En el primer caso, el saldo insoluto actual debe llevarse un periodo y se debe restar el abono realizado del periodo correspondiente, lo que quedaría expresado de la siguiente forma:

$$20,936.56\ (1.10)-12,063.44=10,966.77 \tag{4.24}$$

El individuo al llevar un historial positivo en su cuenta no le genera intereses por incumplimiento. Por otro lado, si no realiza el pago, se acumula éste con los intereses (intereses de incumplimiento) correspondientes al periodo, es decir:

$$20,936.56\ (1.10)= 23,030.21 \tag{4.25}$$

Sabiendo que el árbol binomial tiene un gran número de caminos en donde muchos de ellos llegan a lo mismo como se mostró en la figura 4.9 del apartado anterior, el monto obtenido en la fórmula (4.23) puede ser calculado por dos trayectorias distintas; que pague en el primer periodo y no pague en el segundo periodo ó que no pague en el primer periodo y pague en el segundo periodo, esto se ilustra en las fórmulas (4.26) y (4.27) respectivamente.

$$\mathbf{(1,0)} \qquad 20,936.56\ (1.10)= 23,030.21 \tag{4.26}$$

$$\mathbf{(0,1)} \quad \$33,000.00\ (1.10)- 12,063.44\ (1+.10)= 23,030.21 \tag{4.27}$$

El comportamiento de los saldos insolutos obtenidos en el tercer paso se observan en la figura 4.14 y el desarrollo numérico de dichos saldos se describe a continuación.

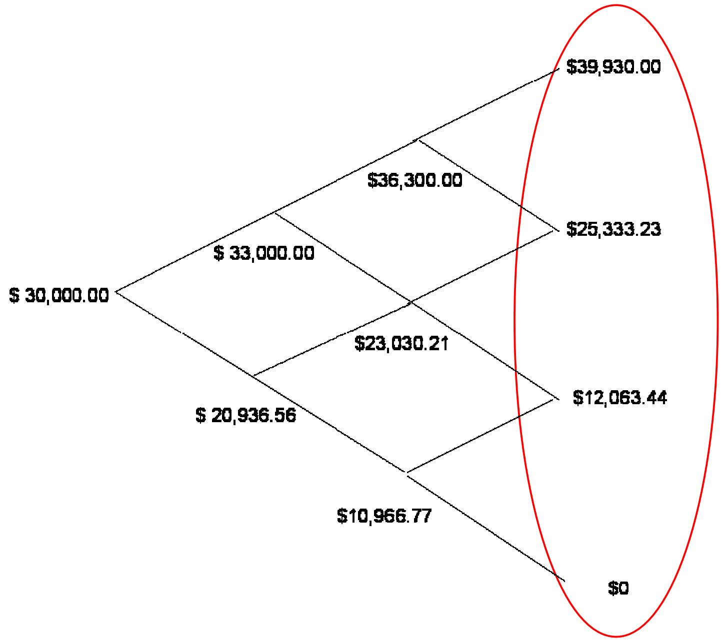

Figura 4.14: Valor del Saldo Insoluto después de tres pasos.

Fuente: Elaboración Propia

El siguiente análisis se realiza para el tercer periodo. Con ubicación en 2Δ se estudian todos los escenarios correspondientes. Partiendo de que el cliente no haya realizado los dos primeros pagos, es decir, que el saldo insoluto sea de 36,300 se tienen dos opciones, que realice el pago o no en el tercer periodo. Para el primer caso se trasladan los 36,300 un periodo en el futuro y se le resta el monto correspondiente al primer pago junto con los intereses acumulados 2 periodos de incumplimiento. Dicho monto se ilustra a continuación:

$$\$36,300.00\ (1.10)- 12,\ 063.44\ (1.10)^2=\$25,33.23 \qquad (4.28)$$

Para el caso contrario, es decir, que el cliente no realice el abono del periodo, los 36,300 acumulan un periodo de intereses, y ese monto representa el saldo insoluto del deudor al final de los 3 periodos. A continuación se muestra la forma en que se obtuvo dicho saldo.

$$\$36,300.00\ (1.10)=\$39,930 \qquad (4.29)$$

Ahora, se parte del caso en que el cliente haya realizado un abono y haya dejado un periodo sin pago, es decir, cuando tenga un saldo insoluto de 23,030.21. En caso de que pague, siguiendo el algoritmo de pago, el saldo insoluto sería el que se muestra en seguida:

$$\$23,030.21\ (1.10)\text{- } 12,\ 063.44\ (1.10) =\$12,063.4 \qquad (4.30)$$

En caso contrario el saldo insoluto sería calculado así:

$$\$23,030.21\ (1.10) =\$25,333.231 \qquad (4.31)$$

Finalmente, si el cliente realizó los pagos correspondientes a cada periodo, el cálculo del saldo insoluto es muy sencillo pues únicamente los \$10,966.77 acumularán 1 periodo de intereses, lo que correspondería a 12, 063.44 que es el pago que va a realizar, lo que lleva a que su saldo insoluto será 0, como se muestra en la fórmula (4.32). Por otro lado si decidiera no realizar el pago, le quedaría este ultimo como saldo insoluto, es decir, 12,063.44 como se muestra en la fórmula (4.33).

$$\$10,966.77\ (1.10)\text{- } 12,\ 063.44 =0 \qquad (4.32)$$

$$\$10,966.77\ (1.10) =\$12,063.44 \qquad (4.33)$$

Si el cliente no realiza ninguno de los 3 pagos la deuda quedaría expresada como los 30,000 pesos que debía en un inicio llevada al futuro con los intereses respectivos de 3 periodos, por lo que el saldo insoluto del último periodo de la rama superior del árbol binomial queda definido por la ecuación (4.34).

$$\$30,000.00\ (1.10)^3 = \$39,930 \tag{4.34}$$

A continuación se desarrolla un panorama general para obtener los saldos insolutos a 120 pasos que culmina con una breve explicación para obtener dichos saldos después de n pasos.

El saldo insoluto que se encuentra en la parte superior del árbol binomial que indica que el cliente no realizó pago alguno se establecería por medio de la fórmula (4.35)

$$V_0 * (1+i)^{120} \tag{4.35}$$

Donde

i = corresponde al interés con el que se calcularon los pagos

120 = corresponde al numero de periodos que durara la deuda.

Por otro lado si el deudor realizó su primer pago en el periodo 119, el saldo insoluto se calculará de acuerdo a la fórmula (4.36):

$$V_0 * (1+i)^{120} - \quad Pago * (1+i)^{119} \tag{4.36}$$

Excluyendo la rama que describe la de la fórmula (4.29), es decir, en la que no se realizó pago alguno se obtiene un árbol con 120 salidas. A continuación se van a analizar estas salidas, cada una de éstas se origina de 2 ramas distintas, una de ellas es resultado de que el pago se realizó el periodo anterior y la otra es resultado de la ausencia de dicho pago. El primer caso se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$Saldo \quad insoluto \quad anterior * (1+i) - Pago * (1+i)^{120-k} \qquad (4.37)$$

Para k=1,2,…, 120

Donde:

- k es el renglón de las salidas de los saldos insolutos

La trayectoria de k va dando como resultado cada uno de los saldos insolutos de las 120 salidas del árbol binomial.

En caso contrario, es decir, cuando las ramas del árbol provienen de la ausencia de pago únicamente se tendrá que acumular el saldo insoluto con los intereses correspondientes a este periodo lo que quedaría de la siguiente forma:

$$Saldo \quad insoluto \quad anterior * (1+i) \qquad (4.38)$$

Para objeto de esta tesis se ocupo esta metodología y se obtuvieron los siguientes saldos insolutos:

	Saldo Insoluto
1	$1,266,902.87
2	$1,250,750.47
3	$1,234,722.73
4	$1,218,818.70
5	$1,203,037.41
6	$1,187,377.90
7	$1,171,839.25
115	$39,303.34
116	$32,625.25
117	$25,998.70
118	$19,423.29
119	$12,898.63
120	$6,424.32
121	$0.00

Figura 4.15: Valor del Saldo Insoluto con el renglón correspondiente.

Fuente: Elaboración Propia

Se ha obtenido una metodología clara para la obtención de saldos insolutos comenzando por un ejemplo detallado a 1, 2 y 3 pasos y continuando con la explicación del proceso a seguir para el hallazgo de los saldos a 120 pasos, se finaliza este apartado concluyendo que es posible implementar un árbol a n pasos siguiendo el procedimiento descrito.

IV.2.2 Cálculo de las Probabilidades Implícitas

Recordando a S, el activo subyacente y su comportamiento. S tenía una probabilidad implícita p de subir a Su (probabilidad de que el cliente no pague la mensualidad). Sin embargo, también S podía bajar hacia Sd con probabilidad implícita 1-p, ésta última probabilidad representa la probabilidad de que el cliente cumpla con su pago. Como se observó en los ejemplos anteriores el incremento u era el mismo en todos los nodos al igual que en nuestro árbol binomial, ya que todos crecen con la misma tasa i de interés, pero no todos los descuentos d son iguales para cada periodo por lo que habría que calcular una probabilidad implícita para cada nodo, y para ello habría que calcular el descuento nodo por nodo, para luego calcular cada probabilidad. Sin embargo es casi imposible calcular todas las posibilidades de caminos que puede seguir el saldo insoluto a lo largo de 120 periodos, ya que sino es infinito si es un número muy grande. Es por ello que se optó por el cálculo de una probabilidad implícita por medio de la siguiente metodología.

El comportamiento de S a través del tiempo, es decir, después de 1, 2, 3,4,…., n pasos es binomial y es lo que origina la realización del árbol binomial. El asunto que nos concierne a continuación es el planteamiento de la probabilidad para algún comportamiento específico de S, sabiendo que cada una de estas salidas se obtiene por medio de la función de densidad de una distribución binomial. Sin embargo, se debe considerar el porcentaje (α) de cartera vencida que tienen las instituciones bancarias en la actualidad.

Este porcentaje se multiplica con el resultado obtenido de la función de densidad de cada una de las salidas, con lo cual se obtiene la probabilidad real. Este procedimiento se ilustra en la fórmula 4.39

$$\alpha * \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{4.39}$$

De acuerdo con la fórmula 4.39 la probabilidad de que en el primer paso el pago no sea realizado se calcula de la siguiente forma:

$$\binom{1}{1} p^1 (1-p)^0 \tag{4.40}$$

Y la probabilidad de pago es el complemento del resultado obtenido en la fórmula 4.40 como se observa en la fórmula 4.41

$$\binom{1}{1} p^0 (1-p)^1 \tag{4.41}$$

Para el segundo paso el árbol ya cuenta con 3 salidas, la probabilidad de que el cliente no haya realizado ambos pagos, es decir, que S suba a Su^2 (ver figura 4.2) será el resultado de la aplicación de la fórmula 4.42

$$\binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \tag{4.42}$$

La siguiente salida designará la probabilidad de que el cliente no haya realizado alguno de ambos pagos, es decir que S avance a Sud (ver figura 4.2). El resultado de este cálculo se obtiene nuevamente aplicando la fórmula 4.43

$$\binom{2}{1} p^{2-1} (1-p)^1 \tag{4.43}$$

La última salida corresponde al hecho de que el cliente haya realizado los 2 pagos respectivos lo que significa que S descienda a Sd^2 (ver figura 4.2). Se ilustra en la fórmula 4.44

$$\binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \tag{4.44}$$

Para el caso del árbol binomial a 120 pasos el cual representa una deuda a 10 años que se va liquidando con pagos mensuales y las probabilidades de cumplimiento e incumplimiento cada periodo van cambiando. Tomando en cuenta al árbol binomial es importante hacer notar que existe una y solamente una probabilidad de cumplimiento, que será representada por la salida inferior de dicho árbol, la cual da la idea de que el cliente efectúa los pagos correspondientes mes a mes. Si se consideran solo los casos de incumplimiento, queda como resultado un árbol con 120 salidas las cuales representan uno ó más pagos omitidos.

De igual forma que en los ejemplos anteriores, en este gran árbol existe el caso de que ninguno de los pagos sea efectuado. Las 119 salidas restantes corresponden a un gran número de combinaciones en donde alguno de los pagos no fue realizado, aunque parece algo difícil de calcular, se vuelve un proceso sencillo si se aplica nuevamente la fórmula binomial (4.39). La fórmula (4.45) muestra el resultado hallado:

$$\sum_{x=1}^{120} \binom{120}{x} p^x (1-p)^{120-x} \tag{4.45}$$

Por otra parte se debe calcular la probabilidad del mejor caso que es cuando S llega a ser $S_d{}^{120}=0$. Esta probabilidad es calculada como el complemento del porcentaje de la cartera vencida de un banco, es decir, que la suma anterior tan solo representa la cartera vencida de un banco. Se tomará 10% como la probabilidad de incumplimiento marcado por la cartera vencida (α). Ya que se espera que la última salida represente lo que debería ocurrir, que pague el crédito en su totalidad, por lo que la probabilidad de esta salida es del 90%. Así mismo, la probabilidad de que no realice un pago en cualquier nodo se denotará como p y se asumirá del 40%, por lo que la probabilidad de pago (1-p) será del 60%.

Para concluir con este apartado se ilustrará un extracto de cada una de las probabilidades de las 121 salidas.

	Probabilidades
1	1.76685E-49
2	3.18032E-47
3	2.83844E-45
4	1.67468E-43
5	7.34766E-42
6	2.55698E-40
7	7.35133E-39
8	1.79582E-37
9	3.8049E-36
10	7.10249E-35
107	5.47731E-13
108	1.07499E-13
109	1.94095E-14
110	3.20523E-15
111	4.80785E-16
112	6.49709E-17
113	7.83131E-18
114	8.31644E-19
115	7.65988E-20
116	5.99469E-21
117	3.87588E-22
118	1.98763E-23
119	7.57994E-25
120	1.91091E-26
121	0.9

Figura 4.16: Probabilidades de cada uno de los Saldos Insolutos.

Fuente: Elaboración Propia

IV.2.3 Cálculo de la Tasa de Interés

Dado que se tiene que calcular el valor de la prima, es necesario contar con la tasa de interés equivalente a los 10 años que corresponden al plazo de crédito. Sin embargo, nadie sabe cuál será dicha tasa en un futuro, por lo que se ocupará como herramienta la regresión para proyectar todas las tasas mensuales de los próximos 120 meses y sacar una tasa anual equivalente, con la que se regresará el valor esperado de la prima.

Para aplicar la regresión se precisa tener ciertos datos como variable independiente y variable(s) dependiente(s). Debido a que las variables que se están relacionando son el tiempo y la tasa de interés, los datos necesarios para realizar esta regresión fueron: como variable independiente el tiempo y como variable dependiente la tasa de interés.

Para poder realizar la proyección era necesario contar con datos reales con respecto a las tasas de interés, para lo cual se ocuparon las tasas de diferentes instrumentos y de diferentes emisiones:

cetes 28	26/01/2006	7.73
cetes 91	26/01/2006	7.62
cetes 182	26/01/2006	7.46
cetes 364	19/01/2006	7.68
bonos 3	26/01/2006	7.45
bonos 5	02/09/2005	7.81
bonos 7	26/01/2006	7.85
bonos 10	02/02/2006	8.21
bonos 20	19/01/2006	8.44

Figura 4.17 Tasa de interés utilizadas para la proyección.

Fuente: elaboración propia

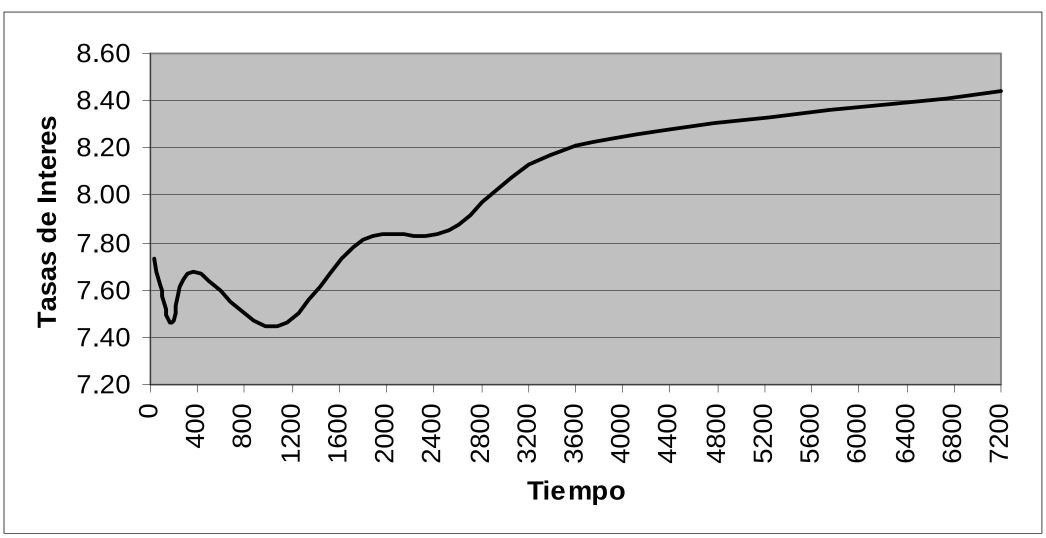

Figura 4.18 Grafica de las tasas de interés

Fuente: elaboración propia

Para fines prácticos el tiempo se consideró en periodos de 30 días, 90 días, 180 días, 360 días.

Se realizó la regresión con diferentes variables independientes como t, t^2, $t^{1/3}$, log (t) y todas las diferentes combinaciones que se pueden formar con ellas. Algunas de estas combinaciones se ilustran en la figura 4.19.

Independiente	Dependiente
x	y
t	i
t^2	i
$t^{1/3}$	i
log(t)	i
t, t^2	i
$t, t^{1/3}$	i
t, log(t)	i
$t, t^2, t^{1/3}$	i
$t, t^{1/3}$, log(t)	i
log(t), $t^2, t^{1/3}$	i
t, log(t), t 1/3	i
...	...

Figura 4.19 Combinaciones de variables dependientes

Fuente: elaboración propia

Se desarrollan todas las regresiones para las combinaciones mencionadas en la figura 4.21 y se guardan los resultados obtenidos tales como R^2 y R ajustada que es la razón entre la suma de cuadrados dentro y la suma de cuadros entre. Cuando R^2 tiende a 1 las variables tienen una buena correlación, esto se interpreta como que las variables dependientes arrojan resultados muy cercanos a la realidad.

La combinación que aporta un resultado mas atinado es: (t, Log (t), $t^{1/3}$) cuya ecuación se muestra en la fórmula 4.46

$$r_t = 8.487 + 0.172(t^{1/3}) - 0.856\,(\mathrm{Log}\,(t)) \qquad (4.46)$$

Al sustituir t = 30, 90, 180, 360 en la fórmula 4.46 se puede constatar que los datos históricos de la tasa de interés con los instrumentos que se ocuparon es muy aproximada a la tasa pronosticada por la regresión. Por lo tanto se decidió utilizar la fórmula 4.46 para pronosticar todas las tasas de interés para t = 360, 720, 1080, 1440,…..3600 es decir, para los siguientes 10 años. Podemos observar los datos y la gráfica de los datos proyectados en las figuras 4.20 y 4.21 respectivamente.

t	Proyeccion
30	7.757028%
60	7.638260%
90	7.584970%
120	7.555598%
150	7.538152%
180	7.527636%
210	7.521535%
240	7.518427%
270	7.517441%
300	7.518009%
330	7.519745%
360	7.522376%
390	7.525705%
3240	8.027104%
3270	8.031509%
3300	8.035898%
3330	8.040270%
3360	8.044626%
3390	8.048966%
3420	8.053290%
3450	8.057598%
3480	8.061891%
3510	8.066168%
3540	8.070431%
3570	8.074678%
3600	8.078910%

Figura 4.20 Datos proyectados con la regresión

Fuente: Elaboración propia

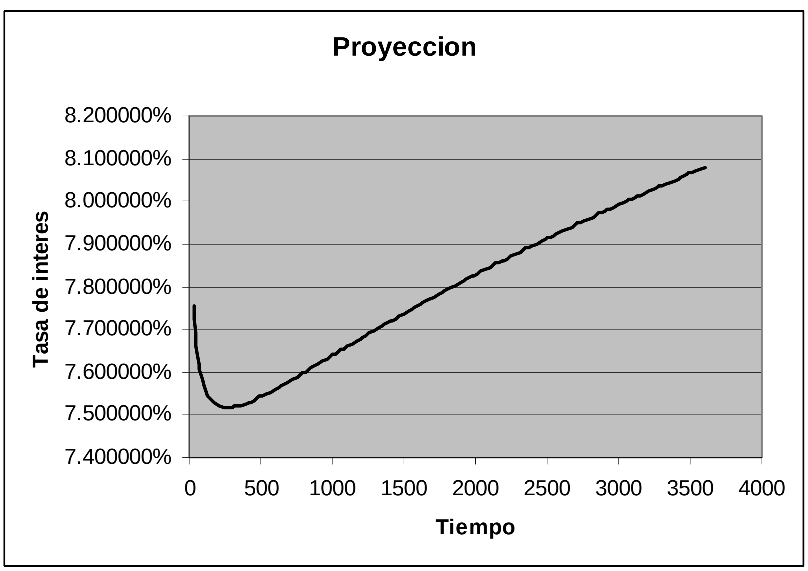

Figura 4.21 Grafica de la proyección

Fuente: Elaboración propia

Cabe destacar que el interés que se obtendrá está anualizado, por lo que hay que calcular las tasas efectivas. Si bien en el primer periodo se obtiene la tasa del primer mes, en el segundo periodo se obtendrá la tasa de interés existente en un periodo de 2 meses, es decir bimestral, para el tercer periodo la tasa que se obtendrá abarcará un periodo de 3 meses, es decir trimestral y así sucesivamente. En la figura 4.22 se ilustra el comportamiento de las tasas halladas con la regresión.

Cabe mencionar que a estas tasas se les va a denominar por medio de la notación i_{P1} para la tasa del primer mes, i_{P2} para la tasa a dos meses y así sucesivamente para cada uno de los periodos respectivos.

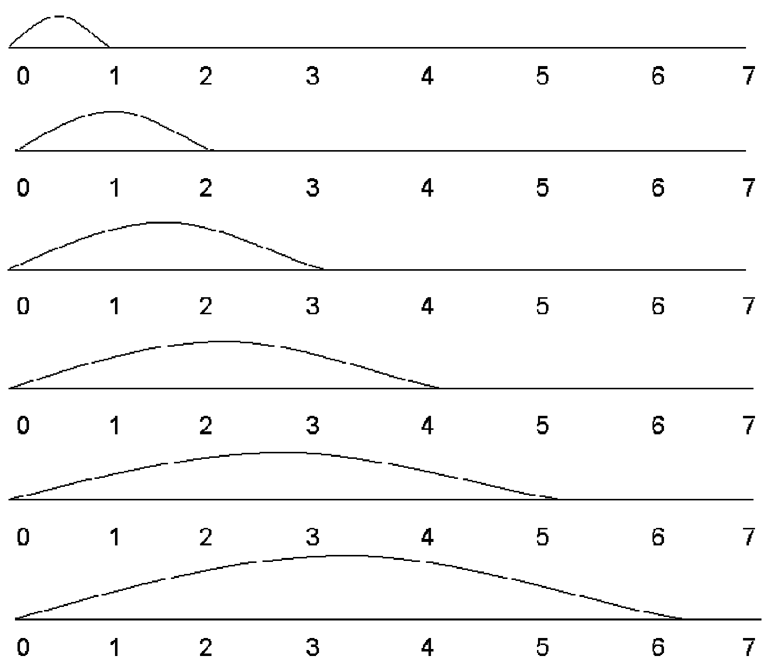

Figura 4.22 Comportamiento de las tasas de interés obtenidas con la regresión

Fuente: Elaboración propia

Sin embargo, las tasas observadas en la ilustración no serán las que se ocuparán para obtener la tasa equivalente anual de los 10 años, por lo tanto en la figura 4.23 se visualiza gráficamente las tasas mensuales de cada mes, que se requieren para obtener la tasa equivalente promedio antes mencionada.

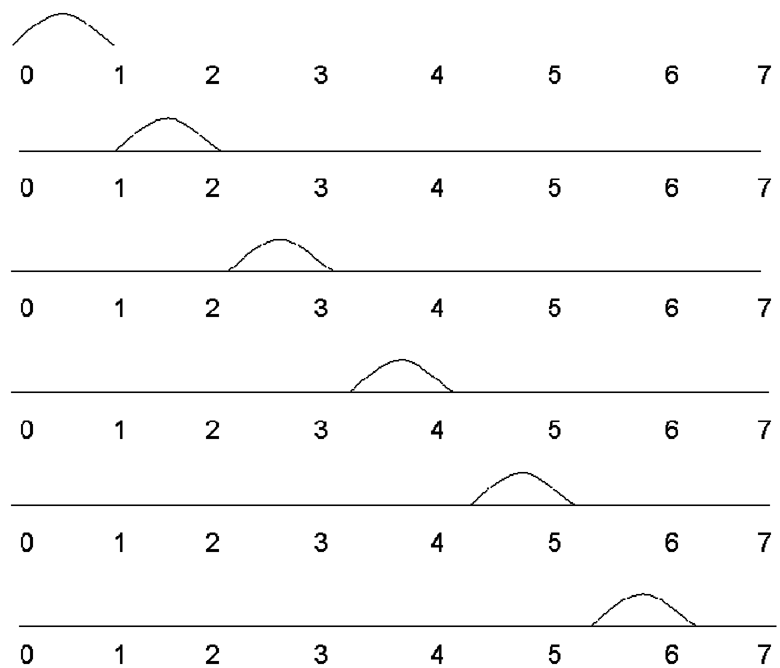

Figura 4.23 Tasas de interés que se requieren para obtener la tasa promedio.

Fuente: Elaboración propia

Por ejemplo, para conseguir la tasa mensual del 3er. mes se aplicará la fórmula 4.47 donde la i_{p3} es la tasa de interés trimestral proveniente de la proyección, y la tasa i_{p2} es la tasa de interés bimensual proveniente de la proyección. Para obtener estas tasas lo primero es hacerlas efectivas dependiendo el periodo, por ejemplo para i_{p3} quedaría:

$$i_{p3} = .076 * \frac{90}{360} = .019$$

El comportamiento de estas tasas se puede observar en la figura 4.22, con lo que se obtiene i_3 que es la tasa proveniente del tercer renglón de la figura 4.23.

$$i_3 = \frac{(1 + i_{p3})}{(1 + i_{p2})} - 1 = \frac{(1.019)}{(1.013)} - 1 = .0062 \qquad (4.47)$$

Para las tasas siguientes el proceso a seguir es semejante al realizado en la fórmula 4.47, de una forma generalizada quedaría:

$$i_t = \frac{(1+i_{pt})}{(1+i_{p(t-1)})} - 1 \tag{4.48}$$

Finalmente, las tasas de interés que se obtuvieron de realizar el proceso anterior son mensuales, por lo que con ellas que se obtendrá una tasa mensual equivalente a los próximos 120 meses y se obtiene matemáticamente por medio de la fórmula 4.49

$$r_{me} = \left(\prod_{j=1}^{120} (1+i_j) \right)^{(1/120)} - 1 = .004947 \tag{4.49}$$

La tasa anual equivalente proviene de anualizar la tasa obtenida anteriormente como se muestra a continuación:

$$r_{ae} = r_{me} * \frac{360}{30} = .05936 \tag{4.50}$$

Los resultados de dicho proceso se muestran en la figura a continuación.

t	Tasas equivalentes
30	7.75703%
60	7.47120%
90	7.38438%
120	7.32851%
150	7.28490%
180	7.24742%
210	7.21343%
240	7.18158%
270	7.15112%
300	7.12160%
3420	4.85904%
3450	4.84332%
3480	4.82769%
3510	4.81216%
3540	4.79672%
3570	4.78137%
3600	4.76611%
Tasa mensual equivalente	**0.49471%**
Tasa anual equivalente	**5.93624%**

Figura 4.24 Tasas de interés equivalentes y la tasa anual equivalente.

Fuente: Elaboración propia

Y la grafica de dichos datos quedaría de la siguiente manera:

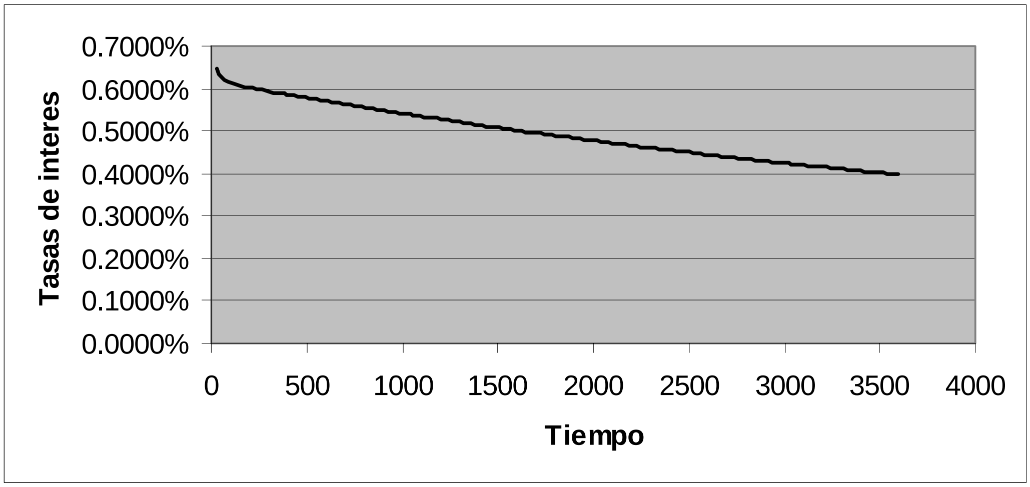

Figura 4.25 Grafica de las tasas equivalentes

Fuente: Elaboración propia

IV.3 Cálculo de la prima

Para el cálculo de la prima se requieren los saldos insolutos de las 121 salidas del árbol binomial. Estos saldos insolutos representan el monto que perdería la institución bancaria considerando todos los escenarios de impago.

Es importante mencionar que el banco será responsable de un porcentaje del valor futuro de la deuda o coaseguro, puesto que debe asumir parte del riesgo ya que se considera imprescindible que la aseguradora y el banco mantengan una estrecha relación para cuidar sus intereses.

El coaseguro del que se hará cargo la institución bancaria para esta tesis será de 8% del valor futuro de la deuda, sea cual sea el monto. Esto significa que, la responsabilidad de la aseguradora ó suma asegurada será la diferencia del saldo insoluto de la deuda al final del periodo menos la cantidad correspondiente que debe aportar el banco, esto se ilustra en la ecuación 4.51

$$SI^* = Max\left[SI - .08\left(SI_o * (1+i)^{120}\right), 0\right] \tag{4.51}$$

Donde:

SI* = Responsabilidad de la Aseguradora

SI = Saldo Insoluto al final de periodo (Responsabilidad de la aseguradora y del banco)

SI_0 = Valor de la Deuda al Principio del Periodo

i = Tasa de interés que se cobra por este crédito.

Desde el punto de vista de la aseguradora, es de vital importancia que ésta calcule el valor esperado de las obligaciones que tendrá con el banco ya que de esta manera se reflejará cuantitativamente en el valor de la prima. Este monto se obtendrá como la sumatoria de la multiplicación de la probabilidad de cada una de las 121 salidas del árbol binomial por la suma asegurada correspondiente a estas probabilidades. Este monto se ilustra por medio de la ecuación 4.52 que calculará un valor esperado, que será necesario traerlo a valor presente para calcular la prima.

$$\text{VEO} = \left[\sum_{j=1}^{120} \binom{120}{j} p^{j} (1-p)^{120-j} * SI_j * \alpha \right] + \left(SI_{121} * (1-\alpha) \right) \tag{4.52}$$

$$\text{Prima} = e^{-rT} \left[VEO \right] \tag{4.53}$$

Donde:

p = probabilidad de incumplimiento

SI_j = Saldo Insoluto de la deuda en la salida j

1-p = probabilidad de cumplimiento

VEO=Valor Esperado de las Obligaciones

α = porcentaje de cartera vencida de una institución bancaria

r = tasa de interés anual obtenida de la regresión

Prima = prima que cobrara la compañía aseguradora al banco.

Para el ejemplo que se está llevando a cabo, si se sustituyen los parámetros respectivos en la ecuación 4.52, es decir p igual a 0.4 y Saldos Insolutos correspondientes a las 121 salidas se obtiene el valor esperado de las obligaciones. El resultado se muestra a continuación:

VEO=$27,312.03

Es importante recordar que este valor esperado es el valor de las obligaciones de la aseguradora después de 120 mensualidades, es decir el valor de la prima en 10 años; sin embargo, la compañía necesita saber cuánto le va a cobrar a la institución bancaria de prima el día de hoy.

El valor de la prima se obtiene el valor obtenido en el VEO, en la ecuación 4.53, y el valor de r obtenido en la regresión y a continuación se muestra dicho resultado.

Prima= $15,084.66

Se ha calculado que la prima en términos de la deuda corresponde a un 3% de ésta última, por lo que es una opción muy conveniente para la institución bancaria, pues este porcentaje no es muy significativo, y a cambio de esto puede evitar pérdidas considerables. Por otro lado para la aseguradora quizá no sea tan conveniente, por lo que en el próximo capitulo se buscará mejorar este cálculo con la aplicación del método de Merton y buscando una convergencia, entre ambos resultados. El seguro es pagado implícitamente por el cliente y no por la institución bancaria. A la deuda del cliente, se le suma el valor del seguro y este total se distribuye en pagos mensuales que serán realizados por el deudor, lo que representa un incremento pequeño en la mensualidad.