UNIVERSIDAD DE LAS AMÉRICAS PUEBLA

Escuela de Ciencias
Departamento de Actuaría, Física y Matemáticas

Aplicaciones de Teoría de Juegos en el modelado de la informalidad laboral en México

Tesis que, para completar los requisitos del Programa de Honores presenta el estudiante

Omar Alfredo Cervantes Cabrera

ID: 156519

Licenciatura en Actuaría

Director de Tesis: Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

San Andrés Cholula, Puebla. Otoño 2020

Hoja de firmas

Tesis que, para completar los requisitos del Programa de Honores presenta el estudiante Omar Alfredo Cervantes Cabrera, ID: 156519

Director de Tesis

Dr. Gerardo Arizmendi Echegaray

Presidente de Tesis

Dr. Carlos Alberto Ibarra Niño

Secretario de Tesis

Dr. Francisco García Castillo

Agradecimientos

Este trabajo es fruto no únicamente de una investigación hecha a lo largo de tres años, en los que he tenido el privilegio de hacer investigación con el doctor Arizmendi, y de pertenecer al Programa de Honores de la UDLAP. Es también el fruto de muchas personas que han invertido tanto en mí en esos tres años.

En primer lugar está mi Dios. Él me ha dado fuerza a lo largo de todo este camino y me ha enseñado las maravillas de la ciencia, de la investigación y del trabajo dedicado. Hay tanto que ha hecho en mi vida que describirlo por completo me llevaría más tiempo y palabras de lo invertido en esta tesis. Este trabajo es primeramente para él, quien sueña con un mundo restaurado, justo y cuyo corazón ha movido el mío para perseguir lo mismo en la medida que me sea permitido en esta vida.

Solo después de él se encuentran mis padres. A lo largo no solo de estos tres años, sino de toda mi vida, los he visto darlo todo; trabajar arduamente, sacrificar tanto, perdonar tanto. En verdad son las mejores personas que conozco; ellos me han enseñado a ser feliz siempre con lo que tengo y lo que soy, al mismo tiempo que me han impulsado y me han exhortado siempre a ir por más. De mi madre puedo decir que es una persona que nunca se conforma, en el sentido de que siempre busca crecer como persona, como madre, en sus proyectos personales, en generosidad, en ayudar a la gente a superarse, mientras que mi padre es el trabajador más diligente y apasionado que he visto; un gran líder que no solo lo es de palabra, sino de hecho porque la gente a su cargo puede constatarlo; alguien que ha experimentado un crecimiento lleno de frutos, que me ha enseñado el valor de la familia y el amor y entrega genuinos que como hombres estamos llamados a hacer por los nuestros. Él ha sido un gran hombre, especialmente para su familia; una persona en la que no hay falsedad. El mundo necesita más personas como mis padres.

Agradezco mucho al doctor Gerardo Arizmendi, quien me guió a lo largo de todo el proceso que conllevó este trabajo. Agradezco que siempre se haya mostrado abierto a todas las modificaciones que iba proponiendo y que me diera la libertad de moldear este proyecto. De igual forma doy gracias por su paciencia, pues estoy seguro que muchas veces le provoqué niveles de adrenalina que solo los deportes extremos lograrían, especialmente cuando llegaban las fechas de entrega de los reportes semestrales. Él fue de gran ayuda en momentos en los que quería rendirme con este trabajo. Ciertamente me introdujo al apasionante mundo de la investigación; confirmó que, si tengo la oportunidad de hacerlo, me encantaría dedicarme a la ciencia por el resto de mi vida y puedo decir que es en verdad una persona ejemplar con la que me encantaría poder trabajar nuevamente en algún momento en el futuro.

Doy gracias también por el doctor Francisco García, y por el doctor Carlos Ibarra. Ambos fueron un gran apoyo al momento de resolver dudas y asesorarme en la búsqueda de información para aplicar el modelo que presento aquí, darme consejo en momentos en los que no estaba seguro de cómo proceder con el trabajo y darme sus opiniones generales. De igual forma agradezco a Doris y José Antonio Moreno, expertos contadores que me ayudaron a nadar en el que, para mí, es el complicado mundo de las leyes fiscales (especilamente en un momento de apuro en el que queda poco tiempo para entregar resultados). Doy gracias por mis amigos en Iglesia Paz, que me apoyaron con sus oraciones y me animaron a seguir adelante.

Finalmente, quisiera agradecer a Monserrat Almazán; creo que sin ella yo no podría estar entregando este trabajo. En un momento de gran confusión y tristeza ella fue una persona que me ayudó a ver con claridad. Gracias a ella es que entré gozosamente a la carrera de actuaría, que me ha permitido explotar al máximo algunos dones y talentos que Dios ha depositado en mí, y gracias a ella aprendí a usarlos para ayudar a muchas personas. Es algo que nunca olvidaré.

Este trabajo es para todos ustedes, amigos y familia.

Índice

1. Introducción

1.1. Breve historia de la Teoría de Juegos

Esta breve reseña histórica de la Teoría de Juegos es una paráfrasis de la publicada por Tenorio y Martín en 2015 que permitirá conocer la relevancia que esta disciplina ha tenido desde la creación de sus primeros conceptos hasta hoy, en las distintas áreas del conocimiento en la que ha sido aplicada. Para mayor detalle, refiérase a [1].

Uno de los documentos que utiliza por primera vez conceptos que hoy en día se conocen propios de la Teoría de Juegos se remonta al año 1704, en el que Leibniz escribe una obra en la que liga los juegos con la lógica, al hablar acerca de la probabilidad utilizada en el estudio de los juegos de azar. Algunos años después, en 1713, Pierre-Rémond de Montmort introdujo el concepto de estrategia mixta y regla minimax. El primero de estos es clave en el desarrollo de las soluciones utilizadas hoy en día para juegos en general, mientras que el segundo tiene que ver con la solución de juegos conocidos como de "suma cero", igualmente de gran importancia en el estudio moderno de la Teoría de Juegos.

Después de esto se realizaron, durante el resto del siglo XVIII, algunos trabajos en Ciencias Sociales, específicamente en materia de votaciones, que utilizaron los principios básicos de la Teoría de Juegos para dar solución a los problemas que trataban. Fue hasta el siglo XIX, en 1838, que Antoine Augustine Cournot modeló la competencia en un duopolio (modelo que se ilustrará más adelante) de modo que encontró un precio de equilibrio determinado por la cantidad de producto que ambas empresas en el duopolio lanzaran en el mercado. Joseph-Louis-François Bertrand propuso un modelo distinto, basado en precios, en 1883 como réplica al modelo de Cournot. Francis Ysidro Edgeworth propuso mejoras al modelo de Bertrand, ya que este presentaba aparentes incongruencias, además de que continuó haciendo trabajos sobre el análisis de equilibrios en general. Concluyendo con las aplicaciones más importantes del siglo XIX, Tenorio y Martín narran un poco acerca de la Teoría de la Selección Sexual de Darwin y cómo Fisher añadió un modelo matemático-estadístico a estas ideas.

Pasando al siglo XX, en 1913 Zermelo publicaría un artículo con dos teoremas, basados en el ajedrez, que afirman por un lado que un jugador que no puede perder no necesariamente tiene la victoria garantizada y, por el otro lado, que el número de movimientos necesarios para una victoria nunca será superior al de pocisiones existentes en el juego. Posteriormente, entre 1921 y 1927, Félix Édouard Justin Émile Borel introduciría los juegos psicológicos y el concepto de estrategia pura. Pero sin duda alguna, el evento que formalizó la Teoría de Juegos fue la publicación del libro de Neumann y Morgenstern *Theory of Games and Economic Behavior*. Esta sería la obra que marcaría el inicio de la Teoría de Juegos como una disciplina nueva.

La siguiente gran contribución sería hecha por John Forbes Nash Jr., quien demostraría en su tesis doctoral que todo juego finito (es decir, con un número finito de jugadores y de estrategias) posee al menos un punto de equilibrio (un equilibrio de Nash, como se conoce hoy en día). El resultado publicado por Nash le otorgó al matemático un premio Nóbel en economía en 1994, junto con los economistas John Charles Harsanyi y Reinhard Justus Reginald Selten, lo que dio fama en general a la teoría anteriormente publicada. A partir de ahí, los avances más significativos utilizando Teoría de Juegos fueron merecedores, de igual manera, del premio Nobel de economía, dos en 2005, uno en 2007 y el último en 2012.

1.2. El estudio de la Teoría de Juegos

Sin lugar a dudas, la Teoría de Juegos es una disciplina que ha tenido una evolución sumamente interesante, y sus aplicaciones han representado una aportación importante a la investigación en matemáticas aplicadas. Hoy en día, la Teoría de Juegos cuenta con sus propias subdivisiones muy bien definidas, aplicables, tal como se mostró en este reseña histórica, a toda clase de situaciones. El estudio de la Teoría de Juegos puede dividirse por la permisión de coaliciones entre los jugadores en juegos cooperativos y no cooperativos; por la información que los jugadores tienen unos sobre otros puede dividirse en juegos de información completa o incompleta; dependiendo de si el juego se juega en secuencia o de manera simultánea se divide en juegos estáticos y dinámicos; en fin, existen más ramas de la Teoría de Juegos que cuentan con diferentes supuestos, tipos de estrategias y soluciones. Para una introducción a muchas de estas ramas se recomienda el libro de Peters [2].

1.3. Discusión sobre la economía en México

El crecimiento económico es una de las mayores áreas de oportunidad en México; existen numerosos trabajos en este respecto, entre los que destaca el realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) [3]. Este trabajo describe áreas específicas que se pueden atacar con el fin de lograr una economía creciente y más equitativa, como ayudar a que se nivele la oferta y la demanda de educación y cuidado de niños en edad temprana, la unificación a nivel subnacional de las regulaciones que permitan un registro más accesible para los nuevos negocios y el continuo monitoreo del funcionamiento de programas ya existentes para su mejora continua.

Pero sin duda alguna, el trabajo se extiende al hablar acerca de la economía informal. Existen muchas definiciones utilizadas por distintos autores respecto a lo que hace que un trabajador sea informal, pero la mayoría coincide en que la principal característica es que se trata de personas cuyo empleo no garantiza el acceso a instituciones de salud o que no pagan contribuciones en materia de seguridad social (véase [4, 5]).

La economía informal es un tema sobre el cual abunda la literatura. Esta constituye una discusión con muchos puntos de vista acerca de sus causas y consecuencias. Entre estas consecuencias, la

OCDE resalta que la economía informal produce mala asignación de recursos, baja productividad y falta de acceso a la seguridad social [3]. Este último punto es muy importante, pues al no tener acceso a la seguridad social no es posible para los trabajadores contar con una pensión garantizada al momento de su retiro, ni tampoco cuentan con otros apoyos propios de esta categoría.

El Centro de Estudios de las Finanzas Públicas de la Cámara de Diputados, por su parte, publicó un estudio en 2018 en el que encontró que, dada la cantidad de personas laborando en la informalidad y sus salarios al momento de levantar el estudio, se pudieron haber recaudado en impuestos hasta un adicional de 102 mil 588 millones de pesos anuales, únicamente por concepto de Impuesto Sobre la Renta, lo que permite ver el alto costo fiscal que la informalidad representa para el país [6].

Habiendo visto de manera general los problemas que se originan a partir de la persistente economía informal, el presente trabajo se enfoca en aplicar la Teoría de Juegos al mercado laboral en México. Específicamente se busca modelar la participación, tanto de trabajadores como de empresas, en el sector formal e informal de la economía. La relevancia de aplicar los conceptos de la Teoría de Juegos en esta área radica no solamente en que la economía es la principal área de aplicación de la Teoría de Juegos, sino también en que modelar el mercado laboral permitirá conocer el posible comportamiento a futuro de este.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: la sección 2 presenta la teoría básica para entender y utilizar modelos de juegos en sus distintas formas, supuestos y soluciones. La sección 3 se enfoca en aplicar los conceptos para tratar de modelar el mercado laboral mexicano; en específico describiendo el comportamiento de los trabajadores y empresas que deciden laborar en el sector formal o informal en respuesta a los incentivos en el mercado. La sección 4 se avoca a ofrecer estimadores de los parámetros del modelo descrito, utizando datos reales, describiendo las fuentes de esta información y justicando su uso. La sección 5 se encargará de utilizar los estimadores dentro del modelo para obtener los resultados del juego y comentarlos. Finalmente, en la sección 6 se hallarán las conclusiones del trabajo y una breve discusión sobre posibles mejoras para el trabajo a futuro.

2. Marco Teórico

2.1. Definiciones básicas en Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos recibe ese nombre debido a que, como se expuso en la reseña histórica, se enfoca en modelar matemáticamente el pensamiento estratégico involucrado en la toma de decisiones. Estas decisiones, tomadas en conjunto por dos o más "jugadores", conducen a diferentes resultados; algunos más preferibles que otros para cada participante en particular (como en un juego).
El cómo modelar las distintas situaciones en las que se puede aplicar un modelo de Teoría de Juegos y la selección de variables que se deben considerar es el verdadero reto dentro de este campo, pues debe buscarse un balance entre el realismo del modelo para su aplicación y la simplicidad en su construcción. Se expuso en párrafos anteriores que existen muchos acercamientos a la Teoría de Juegos. En este trabajo se estudiarán específicamente los juegos no cooperativos, dentro de los cuales se estudiarán a su vez los juegos estáticos y dinámicos y los juegos evolutivos.
Los juegos no cooperativos de acuerdo con la definición de Nash son modelos en los que las interacciones de los tomadores de decisiones, en adelante llamados *jugadores*, no admiten coaliciones entre estos [7]. El supuesto básico en casi cualquier juego modelado es la *racionalidad* -es decir, cada jugador persigue su mayor beneficio como resultado del juego y juega tomando en cuenta las posibles estrategias de sus contrincantes- [8]. Este supuesto suele relajarse especialmente en la Teoría de Juegos Evolutiva, de la cual se hablará más adelante.
Los modelos más sencillos de juegos no cooperativos requieren del modelador conocimientos básicos de cálculo, teoría de conjuntos y probabilidad. Modelos más complejos, como los evolutivos, requieren algunas nociones de sistemas dinámicos. Estas son herramientas que permiten hacer más o menos complejo el modelo y darle una mayor capacidad de interpretación e implementación.
Para comenzar a trabajar un juego no cooperativo resulta indispensable familiarizarse con el término *juego estratégico*, cuya definición, según Osborne [9], se da a continuación:

Definición 2.1. *Un juego estratégico de preferencias ordinarias consiste en:*

a. Un conjunto de jugadores.

b. Para cada jugador, un conjunto de acciones o estrategias.

c. Para cada jugador, preferencias definidas para los distintos perfiles de acción.

Expresando estas ideas matemáticamente, se define al conjunto de estrategias de cada jugador como E_j para $j \in J = \{1, 2, \ldots, N\}$, donde N es el número de jugadores. Para el caso de las preferencias, algunos autores definen eventos, por ejemplo, los eventos A y B, y asignan el símbolo $\gtrsim$ a la relación de preferencia del jugador sobre ambos eventos. Así $A \gtrsim B$ sí y solo sí el jugador prefiere el evento A sobre el evento B.

Para modelar las preferencias dentro de un juego estratégico, no obstante, se necesita cuantificar la preferencia de los jugadores sobre los posibles resultados del juego. Para esto se utiliza una *función de utilidad*, también llamada *función de pago*:

Definición 2.2. *Una función de utilidad o función de pago, en el contexto de Teoría de Juegos, es una función que mapea un vector de estrategias* $\underline{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_N)$*, donde cada* e_j *pertenece al conjunto* E_j*, para* $j \in J = \{1, 2, \ldots, N\}$*, a un número real.*

$$u : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_N \mapsto \mathbb{R}$$

La función de utilidad, además cumple:

$$u(A) \geq u(B) \Longleftrightarrow A \succsim B$$

Cada jugador dentro del juego modelado tiene asignada una función de utilidad u_j, para $j \in J$. De esta manera será posible cuantificar las preferencias de cada uno.
El objetivo de modelar juegos es analizar el comportamiento de los jugadores; más específicamente buscar *puntos de equilibrio*, también conocidos como *equilibrio(s) de Nash*. Un equilibrio de Nash es **un perfil de estrategias seleccionadas por todos los jugadores, tal que ningún jugador puede incrementar su pago al cambiar unilateralmente su estrategia** [10]. De manera formal, un equilibrio de Nash se define de la siguiente manera [7]:

Definición 2.3. *Un vector* $\underline{e}$ *es un* ***punto de equilibrio*** *si y solo si para cada* $j \in J$*:*

$$u_j(\underline{e}^*) = \max_{\underline{e}}[u_j(\underline{e})] \tag{1}$$

Para encontrar el equilibrio de Nash (o equilibrios) en un juego estratégico es importante definir también el concepto de *función de mejor respuesta*:

Definición 2.4. *La función de mejor respuesta del jugador j mapea el conjunto de estrategias del resto de los jugadores al conjunto de estrategias del jugador j, de modo que la estrategia resultante es la que proporciona la mayor utilidad al jugador j [9]. Sea* $\underline{e}_{(-j)} = (e_1, e_2, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_N)$

$$R_j : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \cdots \times E_N \mapsto E_j$$

$$R_j\left(\underline{e}_{(-j)}\right) = \left\{e_j \in E_j \mid u_i(e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots, e_N) \geq u_i(e_1, e_2, \ldots, e'_j, \ldots, e_N), \forall\ e'_j \in E_j\right\} \tag{2}$$

Con esta definición es claro ver que El equilibrio de Nash y la función de mejor respuesta están estrechamente relacionadas, pues ambas sirven para maximizar la utilidad de los jugadores. Esta relación queda formalizada mediante la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Si la estrategia* e_1 *del jugador 1 es la mejor respuesta ante la estrategia* e_2 *del jugador 2 y vice-versa, entonces el perfil de acción* $\underline{e} = (e_1, e_2)$ *es un equilibrio de Nash.*

Demostración. Sea e_1 la mejor respuesta del jugador 1 ante la estrategia e_2 del jugador 2, es decir, $R_1(e_2) = e_1$. Esto implica que $u_1(e_1, e_2) \geq u_1(e_1', e_2)$ $\forall$ $e_1' \in E_1$, análogamente para e_2, de modo que se cumple $u_j(e_1, e_2) = \text{máx}_{\underline{e}}[u_j(\underline{e})]$ para ambos jugadores. Por lo tanto, el perfil de acción $\underline{e}^* = (e_1, e_2)$ es un equilibrio de Nash. □

Los conceptos revisados hasta el momento se ilustrarán mediante el siguiente ejemplo; una adaptación al ejemplo propuesto por Mankiw [11], el cual está basado a su vez en una situación análoga a la del famoso Dilema del Prisionero, modelo que fue formalizado por Tucker en 1950 y publicado en 1980 [1]:

Ejemplo 2.1 (Dilema del Prisionero)**.** *Dos empresas de la misma industria forman un duopolio. Los administradores de estas empresas deben decidir cuánto producir, con el fin de maximizar las ganancias de sus respectivos negocios. En este juego, los administradores pueden decidir si producir una cantidad grande $P_A = 50$ unidades de producto, o pequeña $P_B = 20$ unidades de producto). La decisión que tomen afectará los precios del mercado de la siguiente manera: si hay 100 unidades disponibles en el mercado, el precio por unidad será de \$200; 70 unidades en el mercado provocarán un precio de \$300 por unidad y 40 unidades producirán un precio unitario de \$550. Se asume que el juego se juega una sola vez.*
Los elementos que conforman al juego estratégico son los siguientes:

a. El conjunto de jugadores: las empresas 1 y 2.

b. El conjunto de acciones o estrategias: Cada jugador puede escoger entre una producción alta o baja. Los conjuntos de estrategias en cantidades de producción son $E_1 = E_2 = \{P_A, P_B\}$.

c. Las preferencias definidas para cada perfil de acciones: Ya que el objetivo de una empresa generalmente es maximizar las ganancias, la función de pagos tomará el valor del ingreso derivada de ambas producciones. Denotando como "K" a los miles de unidades monetarias, los valores de las funciones de pagos se obtienen multiplicando el precio unitario por la cantidad producida, resultando en: $u_1(P_A, P_A) = u_2(P_A, P_A) = \$10K, u_1(P_A, P_B) = u_2(P_B, P_A) = \$15K, u_1(P_B, P_A) = u_2(P_A, P_B) = \$6K, u_1(P_B, P_B) = u_2(P_B, P_B) = \$11K$ (véase el Cuadro 1).

Para obtener el equilibrio de Nash se analizan las mejores respuestas de los jugadores:

$$\begin{aligned}
u_1(P_A, P_A) \geq u_1(P_B, P_A) \quad &\Rightarrow \quad R_1(P_A) = P_A \\
u_1(P_A, P_B) \geq u_1(P_B, P_B) \quad &\Rightarrow \quad R_1(P_B) = P_A \\
u_2(P_A, P_A) \geq u_2(P_A, P_B) \quad &\Rightarrow \quad R_2(P_A) = P_A \\
u_2(P_B, P_A) \geq u_2(P_B, P_B) \quad &\Rightarrow \quad R_2(P_B) = P_A
\end{aligned}$$

Ya que producir $P_A = 50$ unidades es la única mejor respuesta para ambos jugadores, se concluye *que el único equilibrio de Nash existente en el juego (al menos utilizando los conceptos vistos hasta el momento) es el perfil de acción (P_A, P_A).*

En el Cuadro 1, el primer componente de cada celda es el pago que recibe el juagor 1, mientras que el segundo componente representa el pago del jugador 2. Con una representación del juego como esta es mucho más sencillo obtener las mejores respuestas de los jugadores, pues únicamente se fija una estrategia de uno de los jugadores y se busca en esa fila (o columna) el valor más grande entre los pagos del otro jugador.

		Empresa 2	
		P_A	P_B
Empresa 1	P_A	\$10K, \$10K	\$15K, \$6K
	P_B	\$6K, \$15K	\$11K, \$11K

Cuadro 1: Matriz de pagos del Dilema del Prisionero.

A continuación, se estudiará un ejemplo de juego en el que el conjunto de estrategias es un intervalo de números reales. Este tipo de juegos son conocidos como *juegos continuos*, mientras que juegos como el Dilema del Prisionero pueden ser categorizados como *juegos discretos*.

Ejemplo 2.2 (Duopolio de Cournot)**.** *Asuma que dos empresas producen el mismo bien en un mercado homogéneo. Las estrategias e_1 y e_2 serán las cantidades producidas por ambas empresas, y estarán acotadas por una capacidad de producción L_j para la empresa $j = 1, 2$. Esto es $E_1 = [0, L_1]$ y $E_2 = [0, L_2]$, de donde se puede observar que será imposible acomodar los posibles resultados del juego en una tabla o matriz como la utilizada en el dilema del prisionero, ya que hay infinitas combinaciones de estrategias. La oferta del producto en el mercado será únicamente la suma de lo producido por ambas empresas y se denotará como $s = e_1 + e_2$. Los costos de producción se denotarán como $C_j(e_j)$ para $j = 1, 2$ y la función de precio o de demanda inversa se denotará como $p(s)$, la cual refleja el precio que se le dará al producto dependiendo de la oferta que haya del mismo en el mercado. Con estos elementos las funciones de utilidad se construyen como:*

$$
\begin{aligned}
u_1(e_1, e_2) &= e_1 p(e_1 + e_2) - C_1(e_1) \\
u_2(e_1, e_2) &= e_2 p(e_1 + e_2) - C_2(e_2)
\end{aligned}
$$

Dependiendo de la forma que tomen las funciones de costo y la de precio se pueden obtener equilibrios distintos, incluso infinitos equilibrios para algunos casos. Para ilustrar la manera de encontrar un equilibrio de Nash en un juego continuo se utilizarán funciones muy sencillas. Asuma que:

$$C_1(e_1) = 15e_1 + 20, \; C_2(e_2) = 18e_2 + 12, \; p(s) = 150 - s, \; L_1 = L_2 = 100$$

Dadas estas condiciones, la función de pagos para el jugador 1 se expresa como:

$$
\begin{aligned}
u_1(e_1, e_2) &= e_1(150 - e_1 - e_2) - (15e_1 + 20) \\
&= 135e_1 - e_1^2 - e_1 e_2 - 20
\end{aligned}
$$

Cuyas derivadas son:

$$\frac{du_1}{de_1} = 135 - 2e_1 - e_2, \ \frac{d^2u_1}{de_1^2} = -2$$

Ya que se trata de una función cóncava, la condición de primer orden nos permitirá obtener el máximo, es decir, la mejor respuesta del jugador 1:

$$R_1(e_2) = \frac{135 - e_2}{2}$$

Siguiendo el mismo proceso, la mejor respuesta del jugador 2 resulta ser:

$$R_2(e_1) = \frac{132 - e_1}{2}$$

El supuesto de racionalidad nos dice que ambos jugadores buscarán maximizar sus pagos, por lo que se espera que la estrategia escogida por cada jugador sea su mejor respuesta, lo que nos deja con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} e_1 &= 67.5 - \frac{1}{2}e_2 \\ e_2 &= 66 - \frac{1}{2}e_1 \end{aligned}$$

Cuya solución representa el único equilibrio de Nash del juego, alcanzado con $e_1 = 46$ *y* $e_2 = 43$.

Los dos ejemplos revisados hasta ahora han contado con un solo equilibrio de Nash, pero es importante recordar que este no necesariamente será el caso. Dicho esto, se estudiará un concepto más general de estrategia, el cual es de suma importancia para asegurar la existencia de puntos de equilibrio.

2.2. Estrategias mixtas

Definición 2.5. *Una estrategia mixta para el jugador i, denotada por* $\pi_i = \sum_j c_{ij}e_{ij}$*, donde* e_{ij} *es llamada la j-ésima estrategia pura del jugador* i*, es una colección de números no negativos cuya suma es igual a uno, y que tienen una correspondencia uno a uno con las estrategias puras del jugador. Al vector de estrategias mixtas se le denotará como* $\underline{\pi}$ *y al conjunto de estrategias mixtas del jugador* j *se le denotará como* Π_j.

El concepto de estrategia pura es el que se ha trabajado hasta este punto. Una estrategia mixta es un generalización del concepto que asigna ponderaciones a las distintas acciones posibles de cada jugador. Se volverá a utilizar el ejemplo anterior para explicar las estrategias mixtas. Suponiendo que la empresa 1 escoge jugar la estrategia pura P_A, se puede decir también que está jugando la estrategia mixta π_1, en donde la suma corre sobre ambas estrategias puras (P_A y P_B) y los ponderadores toman los valores $c_{11} = 1, c_{12} = 0$. De modo que:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \sum_{j=1}^{2} c_{1j}e_{1j} \\ &= 1 \cdot P_A + 0 \cdot P_B \\ &= P_A \end{aligned}$$

Cambiar los valores de los coeficientes resulta en una estrategia diferente que no siempre cuenta con una interpretación muy útil para el caso en estudio. Si se supone ahora que el jugador 1 asigna los valores de los coeficientes de su estrategia mixta como $c_{11} = 1/3$ y $c_{12} = 2/3$ entonces la estrategia pasa a ser:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \sum_{j=1}^{2} c_{1j} e_{1j} \\ &= \frac{1}{3} P_A + \frac{2}{3} P_B \end{aligned}$$

Lo cual podría interpretarse como jugar 1/3 de las veces la estrategia P_A y 2/3 de las veces la estrategia P_B. Si el jugador 1 tuviera acceso a alguna clase de generador de números aleatorios entre uno y tres, entonces podría asignar de manera un tanto arbitraria jugar la estrategia P_A cuando el generador arrojara un 1 y P_B en caso de que el número generado sea 2 o 3. Claramente para este juego en particular estas estrategias son difícilmente implementables, puesto que se supone que los jugadores únicamente jugarán el juego una vez y el planteamiento del problema no indica nada acerca de si tienen acceso a un generador de números aleatorios.

Esto no significa necesariamente que las estrategias mixtas carezcan de utilidad como lo harían en una situación como la del Dilema del Prisionero. En ocasiones las estrategias mixtas representan la única manera de encontrar equlibrios de Nash, ya que, como se demostrará a continuación, permitiendo el uso de estrategias mixtas está garantizado que siempre existirá al menos un equilibrio de Nash. Además, la definición no restringe a que se piense en las estrategias mixtas únicamente en términos de probabilidades, simplemente se debe cumplir que los ponderadores de las estrategias sean no negativos y que su suma sea 1. Esto permite pensar en ellas como posibles pesos asignados a diferentes activos dentro de un portafolio de inversión, o como proporciones de una población con determinadas características en un contexto biológico, demográfico o económico, como es el caso de la aplicación revisada en la tercera sección.

Las estrategias mixtas representan de alguna manera el uso parcial de una estrategia, por lo que la utilidad obtenida mediante el uso de estrategias mixtas debe verse de igual forma ponderada por los pesos asignados a las estrategias. Si se utiliza la interpretación de las estrategias mixtas en términos de probabilidad, es necesario entonces hablar de los pagos como variables aleatorias, cuyo valor sigue la distribución de probabilidad asignada mediante las estrategias mixtas. En el Dilema del Prisionero, suponga que la empresa 1 decide utilizar la estrategia mixta $\pi_1 = (1/3, 2/3)$ y que la empresa 2 decide utilizar la estrategia mixta $\pi_2 = (1/4, 3/4)$. El valor esperado del pago de la empresa 1 (que ahora es aleatorio y será denotada como $U_1(\pi_1, \pi_2)$ será:

$$\begin{aligned} E[U_1(\pi_1,\pi_2)] &= 1/3[(\$10K)(1/4) + (\$15K)(3/4)] + 2/3[(\$6K)(1/4) + (\$11K)(3/4)] \\ &\approx \$10,583 \end{aligned}$$

Las utilidades esperadas también se pueden obtener de manera sencilla utilizando notación matricial. Sean $\pi_j, j = 1, 2, \ldots, n$ vectores columna de estrategias mixtas y $A_{(j)}$ la matriz que contiene los pagos del jugador j, entonces:

$$\begin{aligned} E[U_1(\pi_1,\pi_2)] &= \pi_1^T A_{(1)} \pi_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$10K & \$15K \\ \$6K & \$11K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \\ &\approx \$10,583 \end{aligned}$$

Ahora se mostrará la obtención del equilibrio de Nash para el juego del Dilema del Prisionero utilizando estrategias mixtas:

Ejemplo 2.3 (Dilema del Prisionero con Estrategias Mixtas)**.** *Manteniendo los mismos pagos, los vectores de estrategias mixtas y las matrices de pagos son:*

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} p \\ (1-p) \end{bmatrix}, \pi_2 = \begin{bmatrix} q \\ (1-q) \end{bmatrix} A_{(1)} = \begin{bmatrix} \$10K & \$15K \\ \$6K & \$11K \end{bmatrix}, A_{(2)} = \begin{bmatrix} \$10K & \$6K \\ \$15K & \$11K \end{bmatrix} = A_{(1)}^T,$$

$$p, q \in [0,1]$$

El objetivo entonces es encontrar los valores de p y q que maximicen los pagos esperados de ambos jugadores. El pago esperado del jugador 1 es:

$$\begin{aligned} E[U_1(\pi_1,\pi_2)] &= \pi_1^T A_{(1)} \pi_2 \\ &= \begin{bmatrix} p & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \$10K & \$15K \\ \$6K & \$11K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ (1-q) \end{bmatrix} \\ &= (10q - 10 - q^2)p + (q^2 - q) \end{aligned}$$

Esta función lineal de p se maximiza cuando $p = 0$. Análogamente para el jugador 2, de modo que el único equilibrio es $p = q = 0$, lo que representa asignar un peso de 0 a la estrategia P_B, por lo que el equilibrio en estrategias mixtas resulta ser también (P_A, P_A). Aunque en esta ocasión el equilibrio en estrategias mixtas coincide con el equilibrio en estrategias puras, este no es siempre el caso.

Una vez comprendido el concepto de estrategias mixtas se hablará sobre las condiciones que aseguran la existencia de puntos de equilibrio.

2.3. Existencia de Equilibrios de Nash

Quizás el teorema más importante dentro del estudio de la teoría de juegos sea el Teorema de Nash. Como se mencionó anteriormente, gracias a este importante resultado, John F. Nash obtuvo el premio Nobel de economía en 1994. Antes de enunciarlo es necesario revisar otro teorema, importante en el desarrollo del teorema de Nash:

Teorema 2.1 (Teorema del Punto Fijo de Kakutani). *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, convexo* [1]*, cerrado y acotado y sea la función $f : D \mapsto D$ una función conjunto valuada, para la cual se cumple que*

a. para toda $d \in D$ el conjunto $f(d)$ es no vacío y convexo.

b. la gráfica de f es cerrada (es decir, para toda sucesión $\{d_n\}$ y $\{d'_n\}$ tal que $d'_n \in f(d_n)$ para toda n, $d_n \to d$, y $d'_n \to d'$, se tiene que $d' \in f(d)$).

Entonces existe un punto fijo $d^* \in D$ tal que $d^* \in f(d^*)$.

Con este resultado en mente, se procede a enunciar el teorema de Nash:

Teorema 2.2 (Teorema de Nash). *Para cualquier juego de n jugadores, si n es finito y el conjunto de estrategias mixtas Π_j es finito para cada j, entonces existe al menos un punto de equilibrio en el juego.*

Demostración. Como cada conjunto de estrategias Π_j es no vacío, cerrado y acotado, entonces también lo será el producto cartesiano $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \cdots \times \Pi_n$. Sean $\underline{\pi}_1$ y $\underline{\pi}_2$ dos vectores de estrategias en Π. Además, ya que cada Π_j es convexo. Para cada $\alpha \in [0, 1]$:

$$\alpha\underline{\pi}_1 + (1-\alpha)\underline{\pi}_2 = (\alpha\pi_{11} + (1-\alpha)\pi_{12}, \alpha\pi_{21} + (1-\alpha)\pi_{22}, \ldots, \alpha\pi_{n1} + (1-\alpha)\pi_{n2})$$

debido a la convexidad de cada conjunto Π_j cada elemento $\pi_{j1} + (1-\alpha)\pi_{j2} \in \Pi_j$, por lo que Π es convexo.
Sin alterar la definición, se puede considerar que la función de mejor respuesta R_j del jugador j depende del vector completo de estrategias mixtas $\underline{\pi}$, y no únicamente del vector $\underline{\pi}_{(-j)}$.
Considere ahora la aplicación

$$\begin{aligned} \underline{R} &: \Pi \mapsto \Pi && (3) \\ \underline{R}(\underline{\pi}) &= (R_1(\underline{\pi}), R_2(\underline{\pi}), \ldots, R_N(\underline{\pi}))\,; \forall\ \underline{\pi} \in \Pi && (4) \end{aligned}$$

cuya gráfica es cerrada. Al ser un vector de mejores respuestas, el conjunto $\underline{R}(\underline{\pi})$ es no vacío, para toda π, y al ser un subconjunto de Π por la manera en la que la aplicación está definida, el conjunto $\underline{R}(\underline{\pi})$ también es convexo.

[1] Un conjunto convexo es cualquier conjunto B para el cual, si $x \in B$ y $y \in B$, entonces $\alpha x + (1-\alpha)y \in B$ para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.

Ya que tanto el conjunto Π como la aplicación $\underline{R}$ cumplen todas las condiciones del teorema 2.1, existe un punto fijo $\underline{\pi}^*$ tal que $\underline{\pi}^* \in \underline{R}(\underline{\pi}^*)$. Nótese que $\underline{\pi}^* \in \underline{R}(\underline{\pi}^*)$ implica que $\underline{\pi}^*$ pertenece al conjunto de mejores respuestas de cada jugador. Por lo tanto, por la proposición 2.1, $\underline{\pi}^*$ es necesariamente un punto de equilibrio. □

2.4. Formas extensivas y juegos secuenciales

Aunque no se ha dicho explícitamente, se puede observar que los juegos analizados hasta el momento asumen que toda la información es conocida para los jugadores que participan en él, además de que se asume también que no hay una secuencia dentro del juego, sino que ambos jugadores juegan sus estrategias al mismo tiempo. Ya que en la práctica los juegos sí suelen seguir una secuencia, se introducen los juegos secuenciales para capturar esta idea. Para representar el orden en el que este tipo de juegos son jugados, se utilizan las formas extensivas.
Un juego en forma extensiva es una representación de un juego mediante un árbol de raíz dirigida, el cual se define de la siguiente manera:

Definición 2.6. *Un árbol de raíz dirigida es un par $T = (X, A)$, donde:*

a) X es un conjunto finito con $|X| \geq 2$. Los elementos de X son llamados nodos.

b) A es un subconjunto de $X \times X$. Los elementos de A son llamados aristas. Una arista $a = (x, y) \in A$ es llamada una arista saliente de x y una arista entrante a y.

c) Exite una $x_0 \in X$ única, llamada la raíz, tal que, para cada $x \in X - \{x_0\}$ existe un camino único de x_0 a x. Aquí, un camino de de x_0 a x es una serie de aristas $(x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{k-1}, x_k), (x_k, x)$, para alguna $k \geq 2$.

d) x_0 no tiene aristas entrantes.

e) $Z = \{x \in X | x \text{ no tiene aristas salientes}\}$ es conocido como el conjunto de nodos terminantes.

Existen diversas formas de tratar con los juegos secuenciales y también existen varios conceptos adicionales de equilibrio que se utilizan dependiendo del método que se emplee para encontrarlos. Al final del día, todos estos conceptos resultan ser equilibrios de Nash, por lo que el único tratamiento que se analizará para este tipo de juegos en el presente trabajo, será el de transformarlos en juegos estáticos como los que se han trabajado a lo largo de esta sección, para así obtener la matriz de pagos del juego y computar los equilibrios de Nash como se ha hecho hasta el momento.

Ejemplo 2.4. *Suponga un juego con la siguiente dinámica: primero, el jugador 1 escoge entre las acciones A, B o C. En seguida, el jugador 2 decidirá entre las acciones a o b si el jugador 1 escogió A; c o d si la elección del jugador 1 fue B; y e o f si la jugada anterior fue C. Este juego se resume mediante el árbol de raíz dirigida de la figura 1:*

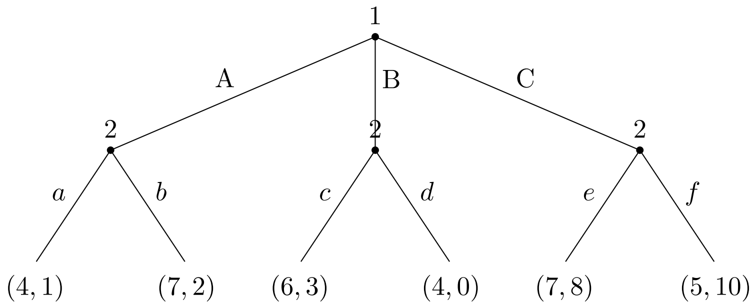

Figura 1: Árbol de raíz dirigida del Ejemplo 1.4

El procedimiento para convertir este juego dinámico en uno estático requiere que se haga énfasis en la diferencia entre una acción de un jugador y una estrategia de un jugador. La segunda es un término más general que hace referencia, en este contexto, a la serie de acciones que el jugador seguirá a lo largo del juego. Para el jugador 1, es directo observar que sus estrategias y sus acciones son el mismo conjunto $\{A,B,C\}$. *Contrario a esto, las estrategias del jugador 2 requieren especificar qué acción se tomará dependiendo de la estrategia seleccionada por el jugador 1. De este modo, la estrategia "ade"denota que el jugador 2 escogerá la acción "a" si el jugador 1 escoge "A", "d" si el jugador 1 escoge "B" y "e" si la elección del jugador 1 es "C". Los conjuntos de estrategia de los jugadores son* $E_1 = \{A, B, C\}$ *y* $E_2 = \{ace, ade, acf, adf, bce, bde, bcf, bdf\}$. *Una vez identificados los conjuntos de estrategias lo siguiente es acomodar las estrategias en una matriz de pagos de la siguiente forma:*

		Jugador 2							
		ace	ade	acf	adf	bce	bde	bcf	bdf
Jugador 1	A	4,1	4,1	4,1	4,1	7,2	7,2	7,2	7,2
	B	6,3	4,0	6,3	4,0	6,3	4,0	6,3	4,0
	C	7,8	7,8	5,10	5,10	7,8	7,8	5,10	5,10

Cuadro 2: Matriz de Pagos del Ejemplo 1.4

Una vez computada la matriz de pago, es sencillo verificar que los equilibrios de Nash en estrategias puras para este juego son $\{A, bce\}, \{A, bde\}, \{A, bcf\}, \{A, bdf\}, \{B, acf\}$ *y* $\{C, adf\}$.

En ocasiones, alguno de los jugadores no está consciente de la acción tomada por el jugador anterior, esto suele expresarse mediante una línea punteada en el árbol de raíz dirigida entre los nodos en los que el jugador con incertidumbre puede encontrarse, que además, lleva el nombre del jugador para identificarlo. Si este jugador tiene una idea *a priori* de la probabilidad de que se encuentre en alguno de los nodos, esta se expresa escribiéndola encima de estos nodos como en la figura 2.

La metodología para transformar estos juegos en estáticos es exáctamente la misma. La infor-

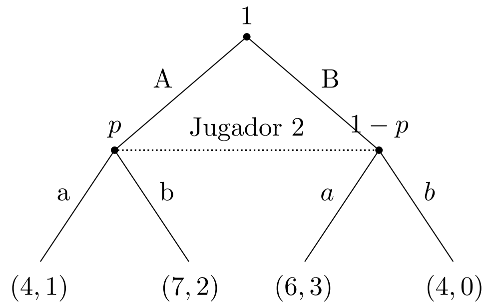

Figura 2: Árbol de raíz dirigida con información incompleta.

mación adicional expresada en los árboles sirve para trabajar con los otros conceptos de equilibrio para juegos dinámicos, los cuales no serán tratados en el presente trabajo.

2.5. Juegos Evolutivos

El último tipo de juegos que se analizará antes de pasar a la aplicación es el de juegos evolutivos. Las primeras nociones de Teoría de Juegos Evolutiva fueron introducidas por Schelling, quien fue el ganador del premio Nobel de economía en 2005 al que se hizo alución en la reseña histórica. La Teoría de Juegos Evolutiva introduce modelos dinámicos e implica el estudio de los jugadores como poblaciones y las estrategias (puras) como rasgos de dichas poblaciones. En el Dilema del Prisionero, no se hablaría de la empresa 1 y la empresa 2, se hablaría de una población de empresarios que tienen el “perfil” o “gen empresarial” 1 o el “perfil” o ”gen empresarial”2.

Las estrategias mixtas se convierten en proporciones de la población en términos del perfil que presentan, de modo que la estrategia mixta $\pi_1 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ representa que, dentro de la población de empresarios, $\frac{1}{4}$ de los empresarios tienen el perfil empresarial 1, y jugarán la estrategia de producción alta P_A, mientras que el resto de la población tiene el perfil empresarial 2, por lo que jugarán la estrategia P_B de producción baja. Los juegos evolutivos, por lo tanto, se solucionan mediante equilibrios de Nash con características especiales. Más adelante se enunciará la proposición que une las soluciones en sistemas dinámicos con las soluciones en Teoría de Juegos. Para esto es indispensable hablar solbre la dinámica del replicador.

La dinámica del replicador hace referencia a un modelo en el que se construyen ecuaciones de “adaptación”, que siguen la lógica introducida por Darwin sobre “la supervivencia del más apto” [12]. En este sentido, se computan expresiones que denotan la adaptación de una población ante las recompensas que resultan con la convivencia de todas las poblaciones en el sistema, de modo que la tasa de crecimiento de la población se ve determinada por su recompensa al hacerlo. Si la recompensa porque haya más integrantes en la población es mayor que el pago promedio de todas las poblaciones (el pago puede ser en recursos naturales, dinero, etc.) entonces de “manera natural” la población crecerá para aprovechar las recompensas por esta “mutación”; en caso contrario, la población decrecerá.

Se ilustrará el concepto de dinámica del replicador mediante la resolución de un problema planteado por Peters [2]:

Ejemplo 2.5. *Dos compañías de video limitadamente racionales deben decidir si trabajar con un sistema abierto o uno de bloqueo, de modo que juegan el siguiente juego asimétrico:*

		Compañía 2	
		Sistema abierto	Sistema de bloqueo
Compañía 1	Sistema abierto	6, 4	5, 5
	Sistema de bloqueo	9,1	10,0

Cuadro 3: Matriz de pagos del Ejemplo 1.5.

Nótese que el ejemplo habla sobre compañías "limitadamente racionales" y es que en Teoría de Juegos Evolutiva se relaja el supuesto de racionalidad debido a que se interpreta a los jugadores como poblaciones que seguirán de manera natural un comportamiento que favorezca la "adaptación de su especie" escogiendo, consecuentemente, los perfiles que favorezcan esta adaptación y aseguren las mayores recompensas.

En congruencia con la notación trabajada hasta el momento con las estrategias mixtas, se denotará a la estrategia mixta (distribución poblacional) de la compañía 1 como $\pi_1 = (c_1, 1 - c_1)$ y a la de la compañía 2 como $\pi_2 = (c_2, 1 - c_2)$. El pago promedio para una población de compañías que escogen un sistema abierto será:

$$c_2 \cdot 6 + (1 - c_2) \cdot 5 = 5 + c_2$$

mientras que el pago promedio de las que escojan el sistema de bloqueo resulta ser:

$$c_2 \cdot 9 + (1 - c_2) \cdot 10 = 10 - c_2$$

En general, la población de compañías de tipo 1 obtendría un pago promedio de:

$$c_1 \cdot (5 + c_2) + (1 - c_1) \cdot (10 - c_2) = 10 - 5c_1 + 2c_1c_2 - c_2$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la población de compañías de tipo 2, los pagos promedio para las compañías que escojan sistema abierto, las que elijan sistema de bloqueo y el promedio general de pagos para compañías de tipo 2 son respectivamente:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot 4 + (1 - c_1) \cdot 1 &= 1 + 3c_1 \\ c_1 \cdot 5 + (1 - c_1) \cdot 0 &= 5c_1 \\ c_2 \cdot (1 + 3c_1) + (1 - c_2) \cdot 5c_1 &= 5c_1 - 2c_1c_2 + c_2 \end{aligned}$$

Una vez que se obtienen estos resultados, se modela la tasa de crecimiento continuo (derivada) de las proporciones de compañías que juegan con sistema abierto dentro de la población de compañías de tipo 1 en proporción a la diferencia entre el pago esperado de estas y el pago promedio de las compañías de tipo 1:

$$\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt} = \dot{c}_1 &= c_1\left[(5+c_2) - (10 - 5c_1 + 2c_1c_2 - c_2)\right] \\ &= c_1(c_1-1)(5-2c_2)\end{aligned}$$

Para el caso de las compañías de tipo 2 que escojan el sistema abierto, la proporción cambia en función de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{dc_2}{dt} = \dot{c}_2 &= c_2\left[(1+3c_1) - (5c_1 - 2c_1c_2 + c_2)\right] \\ &= c_2(c_2-1)(2c_1-1)\end{aligned}$$

No es necesario repetir el procedimiento para las poblaciones faltantes ya que, al tratarse de proporciones, al aumentar la de jugadores que escogen sistema abierto disminuirá la de jugadores que escogen sistema de bloqueo.

Enseguida corresponde analizar el comportamiento de $\dot{c}_1$ y $\dot{c}_2$. Se buscan en particular puntos en los que el sistema completo esté en reposo, lo cual ocurre cuando $\dot{c}_1 = \dot{c}_2 = 0$. Los puntos que logran esto son precisamente los extremos $(c_1, c_2) = (0,0), (c_1, c_2) = (0,1), (c_1, c_2) = (1,0)$ y $(c_1, c_2) = (1,1)$. Esto es para considerar únicamente los valores de c_1 y c_2 entre 0 y 1, de lo contrario, habría que tomar en cuenta también el punto $(c_1, c_2) = (0{,}5, 2{,}5)$. Una vez identificados los puntos en los que el sistema está en reposo, es neceario buscar aquellos que son estables. De manera intuitiva, un punto de reposo estable es aquél en el que una ligera separación de este haría que eventualmente se regresara a él. El único punto que posee esta característica es el punto $(c_1, c_2) = (0,1)$. Nótese que para cualquier valor de c_2, $\dot{c}_1$ decrece en general (las únicas excepciones son cuando c_1 es 0 o 1), mientras que para valores de $0 < c_1 < 0.5, c_2$ crecerá y para $0.5 < c_1 < 1, c_2$ decrecerá. Siguiendo este comportamiento, cualquier punto en el que se encuentre el sistema inevitablemente se verá atraido hacia el punto $(0,1)$. La figura 3 ilustra lo anterior.

Los puntos de descanso estables en un modelo dinámico como este capturan la idea de “mutaciones” no exitosas. Aplicando estos términos al ejemplo anterior, suponga una población en el punto $(c_1, c_2) = (0,1)$, esto quiere decir que todos los integrantes de la población de compañías de tipo 1 juegan con un sistema de bloqueo, mientras que todos en la población de compañías de tipo 2 juegan con sistema abierto. Si dentro de la población de compañias de tipo 2 surgiera una pequeña “mutación” de compañías que comienzan a jugar con sistema de bloqueo, esto causaría que disminuyera la proporción de compañías de tipo 2 que juegan con sistema abierto y ya no sería el 100 %. Sin embargo, el comportamiento del modelo indica que esta proporción regresaría de manera natural a ser el 100 %, lo que implicaría que las empresas que mutaron desaparecerían, tal vez por salir del mercado o por cambiar de estrategia simplemente, pues cabe recordar que la proporción cambia de acuerdo con la diferencia entre el pago esperada y el pago promedio. Es por esta razón que se dice que la mutación no fue exitosa.

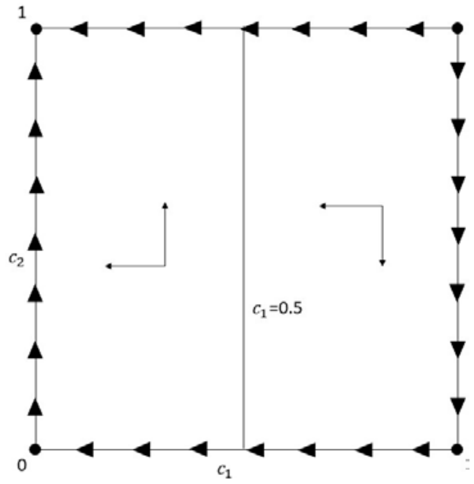

Figura 3: Diagrama de fase para c_1 y c_2

Queda decir que existe una proposición importante que une estas ideas con lo ya expuesto sobre los equilibrios de Nash [2]:

Proposición 2.2. *En un juego de dos jugadores con dos estrategias, un par de estrategias es un punto de descanso estable de la dinámica del replicador si y solo si es un equilibrio de Nash estricto. Para juegos más grandes (ya sea en estrategias o en jugadores), cualquier punto estable en la dinámica del replicador es un equilibrio de Nash estricto, pero lo contrario no es necesariamente cierto.*

El equilibrio de Nash estricto del que se habla en esta propocisión es aquel punto de equilibrio en el que si cualquiera de los jugadores se desvía del mismo, forzosamente sufrirá una pérdida, a diferencia de un equilibrio común del que algún jugador podría desviarse y permanecer con su mismo pago. Peters también explica que este tipo de equilibrios necesariamente está formado por estrategias puras y no mixtas, ya que al utilizar dos o más estrategias puras en cualquier proporción significa que el jugador es indiferente entre los pagos de ambas, contradiciendo la definición de equilibrio estricto.

3. Aplicación: la participación en el sector informal como un juego

En la sección anterior se han revisado las herramientas teóricas más importantes, de manera que se puede exponer la aplicación de los conceptos revisados hasta el momento al mercado laboral en México. Con este fin, se revisa el trabajo hecho por Araujo y Souza, quienes propusieron dos modelos de juego para describir la participación de la población en el sector informal de la economía [13]. El primer modelo es un juego secuencial del tipo que se analizó en la sección 2.4.

3.1. Planteamiento del modelo y notación

En este modelo, los jugadores son la población trabajadora y las empresas del país en su conjunto. Las estrategias para ambos jugadores serán trabajar en el sector formal o informal. A continuación se introduce la notación utilizada por Araujo y Souza en el modelo: sean N el tamaño de la población trabajadora, N_i el número de personas que deciden operar en el sector informal y N_f el número de personas que optan por el sector formal. Sean además n_i la proporción de personas que escogen la informalidad y n_f la proporción que selecciona la formalidad; claramente las variables cumplen con las siguientes relaciones:

$$n_i = \frac{N_i}{N},\ n_f = \frac{N_f}{N},\ n_i + n_f = 1$$

De manera análoga, en el lado de las empresas, L denota el número de empresas en el mercado laboral. El número de empresas que decidan operar en los sectores formal e informal se denotan por L_f y L_i respectivamente y las proporciones de empresas operando en cada sector como η_f y η_i. Al igual que en el caso de la población trabajadora, las variables usadas para las empresas cumplen las siguientes relaciones:

$$\eta_i = \frac{L_i}{L},\ \eta_f = \frac{L_f}{L},\ \eta_i + \eta_f = 1$$

Una vez definido lo anterior, Araujo y Souza definen las funciones de pago de los trabajadores de la siguiente manera:

$$U_f = \sigma(1-\tau)w_f \tag{5}$$

$$U_i = (1-\sigma)[(1-\rho)w_i + \rho(w_i - m)] \tag{6}$$

$$= (1-\sigma)[w_i - \rho m] \tag{7}$$

Donde U_f es el pago para un trabajador formal, U_i es el pago para un trabajador informal. De igual forma, w_f y w_i son los ingresos por trabajar en los sectores formal e informal respectivamente, τ es una tasa impositiva, m es una multa que se cobra por operar en el sector informal y ρ y σ son probabilidades; la primera de que se aplique la multa m, y la segunda de que un trabajador encuentre trabajo en el sector formal.

Ya que en México no es usual que los trabajadores compartan el peso de las multas hechas a los negocios cuando estos incumplen alguna ley, se modificará el pago U_i propuesto por Araujo y Souza, omitiéndose el término ρm, por lo que se escribirá simplemente

$$U_i = (1-\sigma)w_i \tag{8}$$

Del lado de las empresas, los pagos esperados, V_f para las empresas formales y V_i para las informales, son:

$$\begin{aligned} V_f &= \theta[y_f - (1+\gamma)w_f] && (9) \\ V_i &= (1-\theta)\left\{(1-\rho)[y_i - w_i] + \rho[y_i - w_i - m]\right\} && (10) \\ &= (1-\theta)(y_i - w_i - \rho m) && (11) \end{aligned}$$

Donde y_f y y_i representan los ingresos (producción por trabajador) en cada sector, γ denota los costos de la formalidad y θ es la probabilidad de encontrar un trabajador formal.

3.2. El juego secuencial

La relevancia de utilizar un juego de este tipo radica en capturar la idea de que las empresas (o negocios en general) suelen tomar sus decisiones en cuanto a la estructura organizacional y financiera (lo que dictará que se constituyan como formales o informales en este caso) antes de contratar a los trabajadores. Esta justificación también puede pensarse de manera inversa: cuando una persona busca trabajo lo hace generalmente en un negocio ya constituído.

El juego se resume en el árbol de raíz dirigida de la figura 4. A partir de este árbol se puede observar fácilmente que los equilibrios de Nash puros son {F,f} y {I,i}. El lector notará que el árbol cuenta con una línea punteada en los nodos correspondientes a las posibles acciones de los trabajadores. Esta representación permite recordar que en la situación que se busca modelar existe incertidumbre tanto del lado de los trabajadores como de las empresas, lo que se ve reflejado en los pagos mediante los ponderadores σ y θ. Siguiendo la metodología de la sección 2.4, la matriz de pagos quedaría como se presenta en el cuadro 4.

		Trabajadores	
		Trabajo formal	Trabajo informal
Empresas	Trabajo formal	$y_f - (1+\gamma)w_f, (1-\tau)w_f$	0, 0
	Trabajo informal	0,0	$y_i - w_i - \rho m, w_i$

Cuadro 4: Matriz de pagos del Modelo de Araujo y Souza.

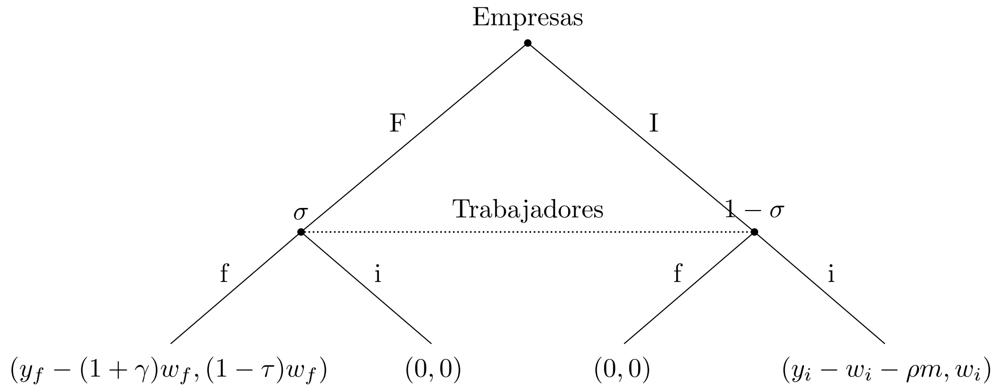

Figura 4: Árbol de raíz dirigida para el modelo de Araujo y Souza.

3.3. El juego evolutivo

Aunque el juego secuencial ofrece una manera intuitiva de pensar en el fenómeno de estudio, la información que provee se encuentra bastante limitada en lo que se refiere a la tendencia del mercado laboral. Por ello se desarrolla a continuación el modelo evolutivo trabajado por Araujo y Souza; su segundo modelo del trabajo previamente citado. Cabe recordar que los juegos evolutivos conservan las ideas subyacentes de la Teoría de Juegos tradicional, pues las acciones o "evolución genética" que adopta una población se ven afectadas por las adoptadas por su contraparte, ya que estas determinan los pagos esperados que dictan el comportamiento del sistema, con la ventaja de que se captura la tendencia de dicho sistema con la estimación de los datos que conforman los pagos.

El primer paso para el diseño del juego evolutivo es el planteamiento de la dinámica del replicador correspondiente; Araujo y Souza utilizan una versión de esta dinámica introducida originalmente por Hofbauer y Sigmund en 2003 para el estudio específico de los mercados laborales. Para utilizar este modelo, los pagos esperados para cada tipo de jugador son sencillamente las variables previamente definidas U_f, U_i, V_f, V_i, y los pagos promedios para trabajadores y empresas son respectivamente

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{f,i} &= \frac{N_f U_f + N_i U_i}{N} \\
&= n_f U_f + n_i U_i \\
\bar{V}_{f,i} &= \frac{L_f V_f + L_i V_i}{L} \\
&= \eta_f V_f + \eta_i V_i
\end{aligned}$$

Cabe recalcar que las estrategias mixtas para este juego no son nada más y nada menos que n_f, n_i, η_f y η_i, de manera que la dinámica del replicador resultará en un sistema de ecuaciones que describan el comportamiento principalmente de $\dot{n}_f$ y de $\dot{\eta}_f$. Para $\dot{n}_f$, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{n}_f &= n_f\{U_f - \bar{U}_{i,f}\} \\
&= n_f\{U_f - (n_f U_f + n_i U_i)\} \\
&= n_f\{U_f(1-n_f) - (1-n_f)U_i\} \\
&= n_f n_i\{U_f - U_i\}
\end{aligned}$$

mientras que para $\dot{\eta}_f$ el desarrollo es:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_f &= \eta_f\{V_f - \bar{V}_{i,f}\} \\
&= \eta_f\{V_f - (\eta_f V_f + \eta_i V_i)\} \\
&= \eta_f\{V_f(1-\eta_f) - (1-\eta_f)V_i\} \\
&= \eta_f \eta_i\{V_f - V_i\}
\end{aligned}$$

Hasta este punto, Araujo y Souza asumen que las probabilidades σ y θ involucradas en los pagos son conocidas. En adelante los estimadores para estas probabilidades los toman de las proporciones de trabajadores (y empresas) en cada sector, es decir $\hat{\sigma} = \eta_f$ y $\hat{\theta} = n_f$. Se denotará a los pagos con las probabilidades sustituidas por sus estimadores como $\hat{U}_f, \hat{U}_i, \hat{V}_f$ y $\hat{V}_i$. De este modo, las ecuaciones para $\dot{n}_f$ y $\dot{\eta}_f$ se convierten en:

$$\begin{aligned}
\dot{n}_f &= n_f n_i\{\hat{U}_f - \hat{U}_i\} \\
&= n_f n_i\{\eta_f(1-\tau)w_f - \eta_i w_i\} \\
\dot{\eta}_f &= \eta_f \eta_i\{\hat{V}_f - \hat{V}_i\} \\
&= \eta_f \eta_i\{n_f[y_f - (1+\gamma)w_f] - n_i(y_i - w_i - \rho m)\}
\end{aligned}$$

Mediante estas representaciones, es fácil observar que los puntos de reposo se localizan en $(\eta_f, n_f) = (0,0)$, $(\eta_f, n_f) = (1,1)$ y aquel punto para el cual los pagos esperados en ambos sectores son iguales, es decir: $\hat{U}_f = \hat{U}_i$ y $\hat{V}_f = \hat{V}_i$. Para hallar este último punto, se introducirá la siguiente notación:

$$\hat{U}'_f = (1-\tau)w_f \tag{12}$$

$$\hat{U}'_i = w_i \tag{13}$$

$$\hat{V}'_f = y_f - (1+\gamma)w_f \tag{14}$$

$$\hat{V}'_i = y_i - w_i - \rho m \tag{15}$$

con esta notación se puede corroborar que el punto de descanso es $(\eta_f, n_f) = \left(\dfrac{\hat{U}'_i}{\hat{U}'_f + \hat{U}'_i}, \dfrac{\hat{V}'_i}{\hat{V}'_f + \hat{V}'_i}\right)$.

El diagrama de fase para este modelo se muestra en la figura 5. A diferencia del diagrama de la sección 2.5, en este existen 4 secciones diferentes, cuyas fronteras se ven determinadas por los valores de equilibrio del punto P.

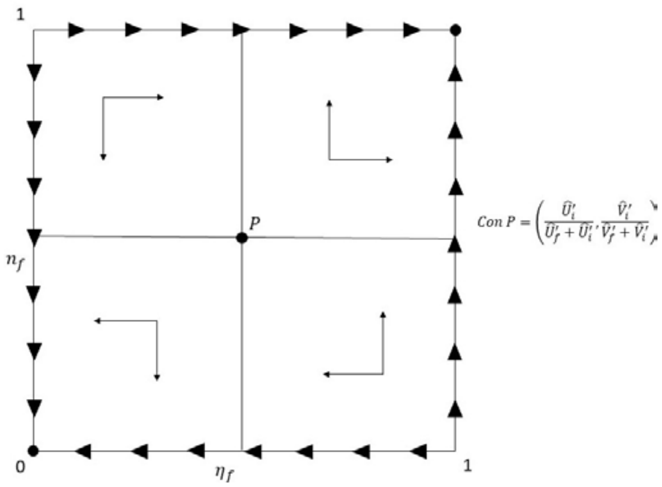

Figura 5: Posible diagrama de fase para la dinámica del replicador del modelo de Araujo y Souza.

Tomando en cuenta que con el tiempo los pagos en ambos sectores suelen cambiar, Araujo y Souza introdujeron ecuaciones de pagos dinámicos, es decir, definieron ecuaciones para $\dot{w}_f$ y $\dot{w}_i$ como se muestran a continuación:

$$\dot{w}_f = \phi[\eta_f - n_f] \tag{16}$$

$$\dot{w}_i = \phi[\eta_i - n_i] \tag{17}$$

De modo que ellos modelan la dinámica de los pagos como una proporción de la diferencia entre oferta y demanda en el mercado laboral. El parámetro $\phi > 0$ mide la sensibilidad ante esta diferencia entre oferta y demanda. Con estas nuevas ecuaciones, para que el sistema completo (incluyendo w_f y w_i) se encuentre en reposo, es necesario que $\dot{n}_f = \dot{n}_i = \dot{\eta}_f = \dot{\eta}_i = \dot{w}_f = \dot{w}_i = 0$. La única restricción adicional a las soluciones previamente encontradas es que para el tercer, caso n_f tiene que ser igual a η_f, lo cual implica que $\frac{\hat{U}_i'}{\hat{U}_f' + \hat{U}_i'} = \frac{\hat{V}_i'}{\hat{V}_f' + \hat{V}_i'}$.

4. Estimación de los datos para el modelo y resultados generales

En esta sección se recurre a distintas fuentes de datos para encontrar estimadores de los parámetros involucrados en el modelo de la sección 3, con el propósito de obtener una idea del estatus en el que se encuentra el mercado laboral en México de acuerdo con el sistema desarrollado.

4.1. Estimación de las proporciones en cada sector

Ya que $n_f + n_i = 1$ y $\eta_f + \eta_i = 1$ únicamente fue necesario estimar un componente de cada ecuación. La estimación de n_i proviene de la tasa de informalidad laboral publicada en los resultados del primer trimestre de 2020 de la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE) llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). Esta encuesta es la principal fuente de información sobre el mercado laboral en México, es un estudio que se hace de manera continua y es utilizada como base para numerosas investigaciones en materia de economía [14].
La tasa de informalidad laboral está definida para propósitos de la ENOE como el "Porcentaje de la población ocupada que es laboralmente vulnerable por la naturaleza de la unidad económica para la que trabajan y/o cuyo vínculo o dependencia laboral no le da acceso a la seguridad social o no es reconocido por su fuente de trabajo." [15]. Esta tasa fue reportada del 56.1 %, por lo tanto:

$$\begin{aligned} n_i &= 56.1\,\% \\ n_f &= 1 - n_i = 43.9\,\% \end{aligned}$$

Para las empresas la estimación de η_i se obtuvo de los resultados de los Censos económicos 2019, publicados el 16 de julio de 2020. INEGI considera informales, dentro del contexto de los censos económicos, a aquellas empresas que cumplen las siguientes características [16]:

a. Tienen cinco personas ocupadas o menos.

b. No pagan seguridad social ni prestaciones sociales.

c. No forman parte de una empresa con varios establecimientos.

d. No cuentan con personal por outsourcing.

e. No tienen gastos por servicios contables, legales y de administración.

f. No tienen gastos por asesoría comercial, mercadotecnia y servicios conexos.

g. No llevan un sistema contable.

Adicionalmente, INEGI toma como unidades económicas a aquellas que "en una sola ubicación física, asentada en un lugar de manera permanente y delimitada por construcciones o instalaciones fijas, combina acciones y recursos bajo el control de una sola entidad propietaria o controladora, para realizar actividades de producción de bienes, compra-venta de mercancías o prestación de servicios; sea con fines de lucro o no" [17], por lo que los resultados presentados en este trabajo aplican para este tipo de unidades económicas. Tomando en cuenta esta información, INEGI reporta un 37.4 % de establecimientos formales, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \eta_f &= 37.4\,\% \\ \eta_i &= 1-\eta_f = 62.6\,\% \end{aligned}$$

4.2. Estimación de los pagos

La estimación de las ganacias requirió el análizis directo de los datos de los Censos económicos 2019 a nivel nacional para el caso de las empresas, mientras que para los trabajadores se analizaron los datos del Módulo de Condiciones Socioeconómicas 2015 [18]. Este último es una encuesta que se levanta en hogares, con el fin de obtener información acerca de ingresos, salud, seguridad social y educación entre otros datos (INEGI). Para el análisis de ambos marcos de datos se utilizaron el software estadístico RStudio y el programa Microsoft Excel.

4.2.1. Estimación de los pagos para las empresas

De la información disponible en la base de datos de los Censos económicos se tomaron en cuenta las siguientes variables (se incluye la descripción proporcionada por INEGI):

a. H001A: Personal ocupado total: Comprende a todas las personas que trabajaron durante el periodo de referencia dependiendo contractualmente o no de la unidad económica, sujetas a su dirección y control.

b. I100A: Personal suministrado por otra razón social total: Son las personas que trabajaron durante el año de referencia para la unidad económica, pero que dependían contractualmente de otra razón social. Excluye al personal que trabajó en el establecimiento por la contratación de servicios como vigilancia, limpieza y jardinería.

c. J300A: Contribuciones patronales a regímenes de seguridad social (millones de pesos) : Son todas las aportaciones monetarias que la unidad económica cubrió con sus recursos a instituciones de seguridad social en beneficio de los trabajadores remunerados.

d. J400A: Otras prestaciones sociales (millones de pesos): Son los pagos que la unidad económica realizó a instituciones privadas en beneficio de sus trabajadores o que otorgó directamente en especie al personal remunerado, en complemento o adición a los sueldos y salarios, tales como servicios médicos privados, despensas, primas de seguros, servicios educativos, ayudas para estudio y guarderías. Excluye las contribuciones patronales a regímenes de seguridad social, compra de equipo, uniformes y ropa de trabajo; costos de capacitación; primas vacacionales;

erogaciones para actividades deportivas y recreativas; gastos por concepto de pasajes, viáticos y alimentación; además de todos aquellos gastos reembolsables al trabajador.

e. K060A: Contratación de servicios profesionales, científicos y técnicos (millones de pesos): Comprende los gastos por servicios profesionales, científicos y técnicos que recibió de consultores independientes y compañías especializadas en temas contables, legales y de administración, proyectos de ingeniería técnica y de detalle, asesoría comercial, mercadotecnia y servicios relacionados.

f. M000A: Total de ingresos por suministro de bienes y servicios (millones de pesos): Es el monto que obtuvo la unidad económica durante el periodo de referencia, por todas aquellas actividades de producción de bienes, comercialización de mercancías y prestación de servicios. Incluye el valor de los bienes y servicios transferidos a otras unidades económicas de la misma empresa, más todas las erogaciones o impuestos cobrados al comprador. Excluye los ingresos financieros, subsidios, cuotas, aportaciones y venta de activos fijos.

g. A171A: Remuneración media por persona ocupada remunerada: Pagos y aportaciones, en dinero y especie, antes de cualquier deducción, que recibió en promedio cada persona remunerada durante 2018. Resulta de dividir el monto de las remuneraciones pagadas al personal remunerado que depende de la razón social, entre el total de personal ocupado remunerado.

Estas variables ayudaron a dividir a los negocios entre formales e informales, pues los valores registrados en ellas sirvieron para corroborar las condiciones de informalidad para empresas descritos con anterioridad. Cualquier unidad que tuviera un valor de 0 en cualquiera de las variables I100A, J300A, J400A, K060A o A171A fue etiquetada como informal. Esta etiqueta también se colocó en aquellas unidades que tuvieran un valor menor o igual a 5 en la variable H001A. Una vez hecha esta separación, la variable M000A fue la usada para obtener las producciones promedio por empleado y_f y y_i. Los Censos económicos utilizan los resultados reportados para un año de actividad, de modo que para el resto de los datos estimados se utilizará esta misma periodicidad. El ingreso de las empresas formales es de \$1,652,142.93. Sin embargo, descontando el Impuesto Sobre la Renta (del que se hablará más adelante) sobre los ingresos de la empresa formal, se obtienen las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} y_f &= \$1,156,500.05 \\ y_i &= \$1,576,148.31 \end{aligned}$$

Esta estimación ilustra el interesante resultado de que en un principio las empresa formales tienen en promedio una producción mayor que las informales, sin embargo, los impuestos merman esta producción, haciendo que las empresas informales tengan mayores ingresos en promedio. El resultado puede no parecer intuitivo a simple vista, pues los negocios informales en general se caracterizan por ser pequeños y de bajos ingresos. Sin embargo, debe recordarse que para este trabajo se toman en cuenta las características de los negocios informales consideradas por INEGI. Con esto en cuenta se vuelve más claro el resultado, pues no necesariamente estos negocios tienen todas las características de los negocios informales; puede haber negocios grandes considerados informales en este estudio por poseer alguna de estas, como el no tener gastos por servicios contables, no ofrecer prestaciones o no contar con personal por outsourcing. Dentro de los datos abiertos que se utilizaron para este trabajo en realidad no se encontraron negocios que cumplieran con todas las características de la informalidad al mismo tiempo.

4.2.2. Estimación de los pagos para los trabajadores

Ya que la principal característica que distingue a los trabajadores formales de los informales es el acceso a la seguridad social, el salario tomado como base para la estimación del salario para los trabajadores formales, es el promedio de los salarios reportados en la edición 2020 de la Valuación Actuarial del Seguro de Invalidez y Vida y del Seguro de Riesgos de Trabajo del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), el cual es un salario diario de \$373.30 [19, 20], equivalente a un salario anual promedio de \$136,254.50.
Por otra parte, la estimación del salario para trabajadores informales proveniente de los datos del Módulo de Condiciones Socioeconómicas 2015 es de \$5,139.48 mensuales. Esta cantidad se actualizó a pesos de enero de 2020 con las tasas de inflación mensuales a partir de septiembre de 2015 (pues el módulo se llevó a cabo desde el 11 de agosto de ese año y hasta el 28 de noviembre del mismo); se tomaron las tasas calculadas con el INPC índice general reportadas por el Banco de México [21], resultando en la cantidad de \$6,226.11, equivalente a un salario anual de \$74,713.37. Los resultados finales de esta estimación son por lo tanto:

$$\begin{aligned} w_f &= \$136,254.50 \\ w_i &= \$74,713.37 \end{aligned}$$

4.3. Estimación del impuesto y de los costos de la formalidad

Ya que existen demasiados impuestos dentro del país y no todos se aplican a todas las empresas o en la misma proporción, se consideraron únicamente dos tipos de impuesto dentro del sector formal: el Impuesto Sobre la Renta (ISR) y las cuotas por concepto de seguridad social.
El ISR es un impuesto que grava los ingresos, tanto de personas como de empresas; los sujetos de este impuesto son las personas físicas y morales que residen en México o que residen en el extranjero pero cuyos ingresos provienen de fuentes de riqueza en el territorio mexicano [22]. El ISR impone una tasa del 30 % fijo para las personas morales, mientras que para las personas físicas, el ISR se compone de un impuesto en cantidad fija y uno en porcentaje del salario. Ambos varían dependiento del intervalo en el cual se encuentre el salario anual de la persona física, de acuerdo con el Cuadro 5.

Límite inferior	**Límite superior**	**Cuota fija**	**% sobre excedente de límite inferior**
\$0,01	\$5.952,84	\$0,00	1.92
\$5.952,85	\$50.524,92	\$114,29	6.40
\$50.524,93	\$88.793,04	\$2.966,91	10.88
\$88.793,05	\$103.218,00	\$7.130,48	16.00
\$103.218,01	\$123.580,20	\$9.438,47	17.92
\$123.580,21	\$249.243,48	\$13.087,37	21.36
\$249.243,49	\$392.841,96	\$39.929,05	23.52
\$392.841,97	\$750.000,00	\$73.703,41	30.00
\$750.000,01	\$1.000.000,00	\$180.850,82	32.00
\$1.000.000,01	\$3.000.000,00	\$260.850,81	34.00
\$3.000.000,01	En adelante	\$940,850,81	35.00

Cuadro 5: Cuotas para el ISR según salario anual para personas físicas. Fuente: Ley del Impuesto Sobre la Renta.

Ya que $w_f = \$136,254.50$, el límite inferior es \$123,580.21, por lo que corresponde un impuesto en porcentaje de 21.36 % sobre el excedente del límite inferior, el cual es de \$136,254.50 - \$123,580.21 = \$12,674.29. Una vez calculado el 21.36 % de esta cantidad y habiendo sumado la cuota fija de \$13,087.37 correspondiente, el ISR total que un trabajador promedio en el sector formal debe de pagar es de \$15,794.60 anuales.

En cuanto a las cuotas por concepto de seguidad social, un empleado en el sector formal se ve obligado a pagar, de acuerdo con la Ley del Seguro Social de 1995, las siguientes cuotas [23]:

a. 0.375 % sobre el salario base de cotización para cubrir las prestaciones del seguro de enfermedades y maternidad de los pensionados y sus beneficiarios, en los seguros de riesgos de trabajo, invalidez y vida, así como retiro, cesantía en edad avanzada y vejez (artículo 25).

b. 0.25 % sobre el salario base de cotización para financiar las prestaciones en dinero del seguro de enfermedades y maternidad (artículo 107).

c. 0.625 % sobre el salario base de cotización para el seguro de invalidez y vida (artículo 147).

d. 1.125 % sobre el salario base de cotización por el ramo de cesantía en edad avanzada y vejez (artículo 168).

Todas estas cuotas suman un total de 2.375 % sobre el salario base de cotización, es decir, un monto total de $\$136,254.50 \cdot 0.02375 = \$3,236.04$. Sumando ambos montos, el pago por ISR y las cuotas de seguridad social, el total de impuestos para un trabajador formal es de \$19,030.64. Esto quiere decir que $\tau w_f = \$19,030.64$. Despejando τ de esta igualdad, se obtiene una sola tasa impositiva de aproximadamente 13.967 %.

Las cuotas de seguridad social para los patrones de las empresas son los siguientes:

a. 1.05 % sobre el salario base de cotización para cubrir las prestaciones del seguro de enfermedades y maternidad de los pensionados y sus beneficiarios, en los seguros de riesgos de trabajo, invalidez y vida, así como retiro, cesantía en edad avanzada y vejez (artículo 25).

b. 0.60 % sobre el salario base de cotización para financiar las prestaciones en dinero del seguro de enfermedades y maternidad (artículo 107).

c. 1.75 % sobre el salario base de cotización para el seguro de invalidez y vida (artículo 147).

d. 2 % sobre el salario base de cotización para el ramo de retiro y un 3.15 % adicional para el ramo de cesantía en edad avanzada y vejez (artículo 168).

e. 1 % para pagar la prima de las prestaciones del ramo de guarderías (artículo 211).

Estas cuotas suman un total de 9.55 % sobre el salario base de cotización. Una vez computados estos resultados, las estimaciones de las variables de impuestos y costos de la formalidad quedan como:

$$
\begin{aligned}
\tau &\approx 13.967\,\% \\
\gamma &= 9.55\,\%
\end{aligned}
$$

4.4. Estimación de la multa

En sentido estricto no existe una multa por concepto de informalidad dentro de la legislación mexicana cuando esta es hecha de manera legal. La estimación del parámetro m del modelo de Araujo y Souza se obtuvo revisando las multas por incumplimiento de la obligación del pago de cuotas de seguridad social y la omisión del pago del ISR.

De acuerdo con el artículo 81 del Código Fiscal de la Federación, "No presentar las declaraciones, las solicitudes, los avisos o las constancias que exijan las disposiciones fiscales, o no hacerlo a través de los medios electrónicos que señale la Secretaría de Hacienda y Crédito Público o presentarlos a requerimiento de las autoridades fiscales. No cumplir los requerimientos de las autoridades fiscales para presentar alguno de los documentos o medios electrónicos a que se refiere esta fracción, o cumplirlos fuera de los plazos señalados en los mismos." es considerado una infracción que se sanciona con una multa de \$1,400.00 a \$17,370.00 por cada obligación no declarada. De este rango de valores se tomó el valor medio (\$9,385.00) como aproximación de esta multa. Ya que el artículo 70 del mismo código afirma que el pago de multas se hace de manera independiente a la exigencia del pago de las contribuciones, también se tomará en cuenta la cantidad implicada en el pago del ISR como parte de la multa [24].

Aunado a esto, el no llevar contabilidad es una infracción sancionada con una multa que puede ir desde \$1,520.00 hasta \$15,140.00, de acuerdo con los artículos 83 y 84 del mismo Código Fiscal. Cabe recordar que la falta de contabilidad es una característica que los censos económicos tomaron en cuenta al momento de calificar un establecimiento como informal. En este caso también se consideró el valor medio de este rango (\$8,330.00) para sumarlo al monto de la multa.

En cuanto a la omisión de las obligaciones relacionadas a la seguridad social, el artículo 304 de la Ley del Seguro Social estipula que el no estar registrado ante el instituto, o hacerlo fuera del plazo establecido en la ley amerita una multa cuyo monto es de 20 a 350 veces el salario mínimo diario general vigente en la Ciudad de México. Esta misma multa aplica a quienes no inscriban a los trabajadores ante el Instituo Mexicano del Seguro Social. Del rango establecido para la multa, se tomará el valor máximo para sumarse a la estimación, asumiendo la sanción por cometer ambas infracciones. Según lo reportado por la Comisión Nacional de los Salarios Mínimos, el salario mínimo desde enero de 2020 es de \$123.22, lo que implica que la multa asciende a \$43,127.00 [25].

Tomando en cuenta todas las cuantías encontradas, la estimación del parámetro m es de:

$$m = \$513,157.10$$

4.4.1. Un comentario sobre la probabilidad de aplicar la multa

Entre la variada información estadística que se puede encontrar en México, desafortunadamente no se encuentra disponible el número de negocios informales que son multados anualmente, si es que alguno es multado en realidad pues no existe formalmente una multa para los empleos informales, sino sólamente para las actividades ilícitas en las que los negocios pueden incurrir. Matemáticamente hablando, podría decirse que la probabilidad de multar un negocio informal tiende a cero ($\rho \to 0$), por lo cual, para la utilización del modelo se asumirá una probabilidad muy pequeña:

$$\rho = 0.001 = 0.1\,\%$$

Posteriormente se comentarán algunos resultados asumiendo probabilidades mayores.

5. Resultados del juego

Una vez estimados los datos necesarios para la utilización del modelo de Araujo y Souza los pagos se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_f' &= y_f - (1+\gamma)w_f \\
&= \$1,156,500.05 - (1.0955)(\$136,254.50) \\
&= \$1,007,233.00 \\
\hat{U}_f' &= (1-\tau)w_f \\
&\approx (0.86033)(\$136,254{,}50) \\
&\approx \$117,223.83 \\
\hat{V}_i' &= y_i - w_i - \rho m \\
&= \$1,576,148.31 - \$74,713.37 - (0.001)(\$513,157.10) \\
&= \$1,500,922.00 \\
\hat{U}_i' &= w_i \\
&= \$74,713.37
\end{aligned}$$

La matriz de pagos del juego estático es:

		Trabajadores	
		Trabajo formal	Trabajo informal
Empresas	Trabajo formal	\$1,007,233.00; \$117,223.83	0, 0
	Trabajo informal	0,0	\$1,500,922.00; \$74,713.37

Cuadro 6: Matriz de pagos del Modelo de Araujo y Souza con datos estimados.

El punto de equilibrio estable del diagrama de fase de la sección anterior es:

$$\left(\frac{\hat{U}_i'}{\hat{U}_f' + \hat{U}_i'}, \frac{\hat{V}_i'}{\hat{V}_f' + \hat{V}_i'} \right) \approx (0.38762, 0.58657)$$

El diagrama de fase actualizado, junto con las coordenadas actuales en México se muestran en la figura 6, para la cual, el punto que representa a México en términos de proporciones de formalidad es el punto Q. El diagrama está dividido por cuadrantes separados por el punto P, e ilustra la interesante situación de México, pues dadas las condiciones actuales el sistema se mueve hacia la informalidad total. Esto se puede ver en el hecho de que el punto Q se encuentra en el cuadrante III. Mientras se permanezca en este punto, los salarios en el sector formal decrecerán, de acuerdo con la ecuación 16.

De forma analítica, se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{n}_f &= n_f n_i \{\hat{U}_f - \hat{U}_i\} \\
&\approx (0{,}439)(0{,}561)\{43,841.71 - 46,770.57\}
\end{aligned}$$

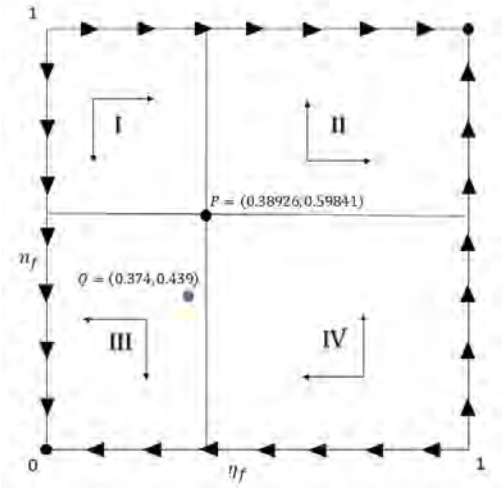

Figura 6: Diagrama de fase para la dinámica del replicador del modelo de Araujo y Souza con datos estimados.

cuyo signo será negativo, a la vez que

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_f &= \eta_f \eta_i \{\hat{V}_f - \hat{V}_i\} \\ &\approx (0{,}374)(0{,}626)\{442,175.29 - 842,017.24\} \end{aligned}$$

también de signo negativo. Ambos resultados permiten ver con datos reales el efecto de que el punto Q se encuentre en el cuadrante III; pensando nuevamente en la interpretación evolutiva del modelo, se puede concluir que el pago esperado en el sector formal es menor que el pago promedio en el mercado laboral en general, por lo que se espera que la proporción, tanto de empresas formales como de trabajadores formales disminuya.

La probabilidad ρ de aplicar la multa m tiene posee una relación inversa con el cociente $U_i'/(U_f' + U_i')$; a medida que ρ crece de 0 a 1, el cociente decrece, sin embargo los valores de $U_i'/(U_f' + U_i')$ permanecen siempre entre 0.4952 y 0.5985, por lo que los resultados del modelo no se ven alterados; el punto estimado para México permanece en el cuadrante I.

Una observación interesante es que, aunque muy poco, la formalidad ha aumentado en los últimos años; una mirada a la serie desestacionalizada de la tasa de informalidad laboral publicada por INEGI permite corroborarlo.

Una posible explicación para este fenómeno es que, suponiendo que la dinámica ha seguido el comportamiento del modelo a lo largo del tiempo, el punto que representa las proporciones de formalidad en México para años anteriores se encontrara en el cuadrante I o en el II, es decir $0 < \eta_f < 1$ y $0.59841 < n_f < 1$. En dicho cuadrante, el sistema se mueve hacia el punto de equilibrio P, de modo que es natural esperar que disminuya la informalidad. Una perturbación que disminuyera la proporción de empresas formales pudo mover el punto hacia el lado izquierdo del equilibrio de empresas formales, lo que le dió su posición actual. Dicho evento pudo ser la falta de inversión a causa de la incertidumbre por la toma de poder del actual presidente de la respública

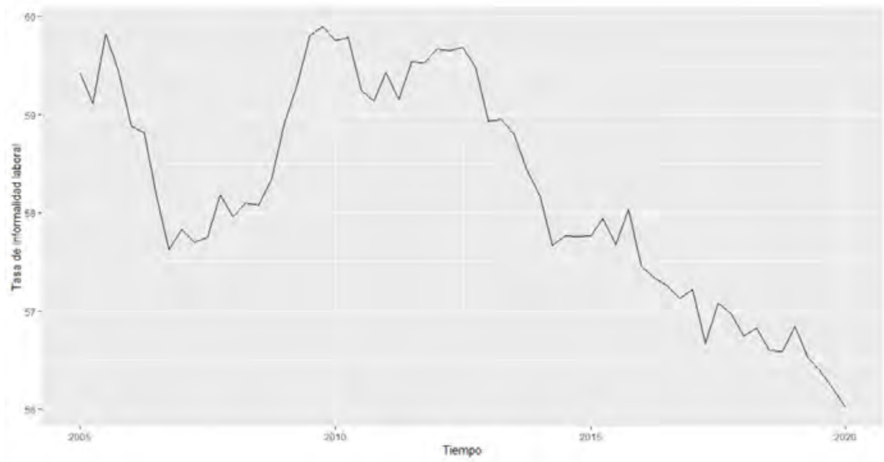

Figura 7: Tasas de informalidad laboral por trimestre. Fuente: INEGI [15].

en 2018. Esto puede verse reflejado en el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, dicho índice presentó un cambio de nivel drástico a la baja, del cual el mercado comenzaba a recuperarse este año. Los valores del IPC se presentan en la figura 8.

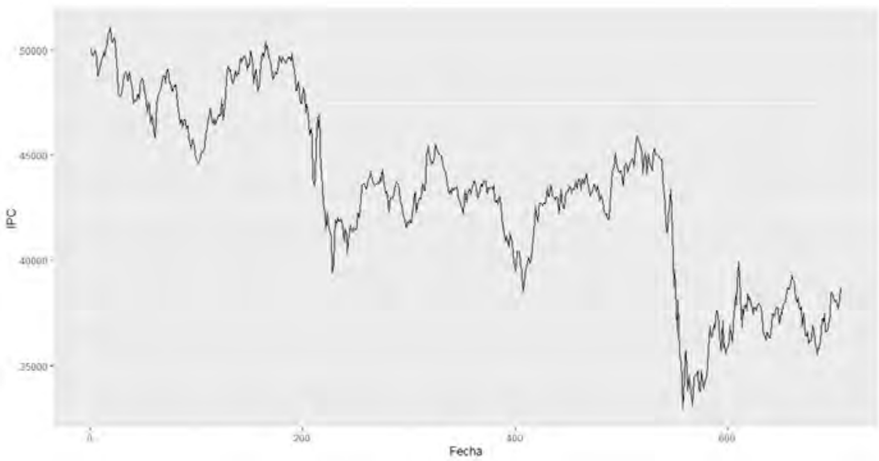

Figura 8: Precio de cierre del IPC del 02/01/2018 al 22/10/2020. Fuente: Yahoo Finanzas [26].

En dicha gráfica la observación 0 corresponde al 2 de enero de 2018, mientras que la última observación corresponde al 22 de octubre de 2020. Puede apreciarse el cambio de nivel aproximadamente entre las observaciones 200 a 250, correspondientes al perido del 15 de octubre de 2018 al 28 de diciembre de 2018. La figura 8 permite ver, además, un nuevo cambio de nivel en las observaciones 520 a 560, correspondientes a las fechas de finales de enero y hasta finales de marzo del presente año. Este nuevo cambio de nivel muy probablemente fue causado por problemas relacionados a la pandemia de COVID-19, declarada como tal el 11 de marzo de 2020 [27]. Este nuevo cambio de nivel en el IPC sugiere que la inversión en las empresas es cada vez menor, lo que podría incrementar la informalidad y acelerar el proceso ilustrado en el diagrama de fase de la figura 6.

6. Discusión y conclusiones

El tema de economía informal es bastante extenso, y sería imposible pretender describir todo su funcionamiento con un solo modelo. Sin embargo, la información que el presente trabajo proporciona es valiosa, pues permite indagar acerca de las causas y consecuencias de la situación actual del mercado laboral para tratar de responder de manera adecuada a la misma. El hecho de que sea un modelo evolutivo permite ver el cambio en el tiempo de manera relativamente sencilla, lo que permite una actualización continua de los resultados. Además de esto, se abren oportunidades para futuras investigaciones que pueden mejorar lo desarrollado a lo largo de todo este trabajo; dos de estas posibles mejoras son las siguientes:

a. Es posible mejorar las estimaciones de las funciones de pago con estudios avocados a este fin. Robles y Martínez desarrollaron en su trabajo un modelo logístico para obtener la probabilidad de que un trabajador pertenezca al sector informal, tomando como variables explicativas la edad, el nivel educativo, el ingreso, el estado civil, el sexo y el nivel de confianza en las unidades médicas como prestación en un trabajo formal [28]. Estimaciones de estos factores podrían ayudar a obtener a su vez mejores estimaciones de los pagos y probabilidades involucradas en el modelo, basadas verdaderamente en la percepción popular. Este sería un avance relevante pues Croson argumenta, en una reseña de la literatura sobre Teoría de Juegos Experimental, que limitar las funciones de pago a las ganancias monetarias en un modelo de Teoría de Juegos puede conducir a pronósticos de comportamiento bastante pobres [29]. Esto no quiere decir que las funciones de pago de Araujo y Souza no reflejen adecuadamente las preferencias de trabajadores y empresas. Esto queda claro con el siguiente punto.

b. Llevar a cabo estudios regionales podría ser el segundo paso relevante de aplicación para el modelo. Esto debido a que el trabajo anteriormente citado de Robles y Martínez, expone además que la economía informal es heterogénea entre los estados de la República; no todos los factores afectan de la misma manera en todas las regiones del país, aunque cabe aclarar que en este trabajo destacó la variable de ingresos como la más significativa en la estimación de la probabilidad.

Pasando a los comentarios sobre los pasos a seguir en materia de economía, es importante notar que la persistentemente alta informalidad no es el único factor que merma el crecimiento económico de México. Ya en la introducción a este trabajo se mencionaron algunos de los temas que la OCDE recomienda atender al respecto. Por su parte, Levy profundiza en su obra acerca de la mala asignación de recursos como el principal problema [30]. Según este autor la mala asignación provoca que las empresas menos productivas (usualmente informales) reciban una gran cantidad de recursos (como subsidios por ejemplo), mientras que las empresas más productivas (usualmente formales) únicamente se ven gravadas. Esto hace necesario que cualquier programa que se introduzca para incrementar el trabajo formal debe ir acompañado de políticas que ayuden a contrarrestar la mala asignación, tales como:

a. La desvinculación de la seguridad social como exclusiva del trabajo asalariado.

b. La introducción de un seguro de desempleo como reemplazo de la indemnización por despido y su vinculación con programas de capacitación laboral.

c. El establecimiento de exenciones distintas al IVA en ayuda a los hogares de bajos ingresos.

d. Otorgamiento de mayor autonomía a las instituciones encargadas de velar por el cumplimiento de los contratos, para evitar la impunidad y la corrupción.

De lo contrario, los programas probablemente terminarían contribuyendo más a la mala asignación, desincentivando la formalidad y agravando el problema.

A. Demostración alternativa del Teorema de Nash

Este apéndice presenta el teorema de Nash como él lo publicó originalmente en su tesis doctoral en 1950.

Teorema A.1 (Teorema de Nash)**.** *Todo juego finito tiene un punto de equilibrio.*

Demostración. Se denotará como $u_{j\alpha}(\underline{\pi})$ a la función de utilidad cuando el jugador j utiliza su estrategia pura $e_{j\alpha}$ y los demás jugadores utilizan sus respectivas estrategias mixtas π_j. Para cada entero λ definimos las siguientes funciones continuas de $\underline{\pi}$:

$$\begin{aligned} q_j(\underline{\pi}) &= \max_{\alpha} u_{j\alpha}(\underline{\pi}) \\ \phi_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) &= u_{j\alpha}(\underline{\pi}) - q_j(\underline{\pi}) + \frac{1}{\lambda}, \text{ y} \\ \phi^{+}_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) &= \max[0, \phi_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda)] \end{aligned}$$

Ahora bien $\sum_\alpha \phi^{+}_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) \geq \max_\alpha \phi^{+}_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) = \frac{1}{\lambda} \geq 0$, de modo que

$$C'_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) = \frac{\phi^{+}_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda)}{\sum_\beta \phi^{+}_{j\beta}(\underline{\pi},\lambda)}$$

es continua.

Posteriormente se define $\Pi'_j(\underline{\pi},\lambda) = \sum_\alpha e_{j\alpha} C'_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda)$ y $\underline{\pi}'(\underline{\pi},\lambda) = (\pi'_1, \pi'_2, \ldots, \pi'_n)$. Ya que todas las operaciones han preservado la continuidad, la aplicación $\underline{\pi} \mapsto \underline{\pi}'(\underline{\pi},\lambda)$ es continua y, ya que el espacio de n-tuplas $\underline{\pi}$ es una celda, debe haber un punto fijo para cada λ. Esto implica que habrá una subsecuencia $\underline{\pi}_\mu$ convergente a $\underline{\pi}^*$, donde $\underline{\pi}_\mu$ es fijo en la aplicación $\underline{\pi} \mapsto \underline{\pi}'(\underline{\pi}, \lambda_{(\mu)})$.
Suponga ahora que $\underline{\pi}^*$ no fuera un punto de equilibrio. Entonces, si $\underline{\pi}^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_n^*)$ algún componente π_j^* no es óptimo en contra de los otros, lo que implica que π_j^* utiliza alguna estrategia pura $e^*_{j\alpha}$ que no es óptima. Esto significa que $u_{j\alpha}(\underline{\pi}^*) < q_j(\underline{\pi}^*)$, lo que justifica escribir $u_{j\alpha}(\underline{\pi}^*) - q_j(\underline{\pi}^*) < -\epsilon$.
Por la continuidad, si μ es suficientemente grande $\left|\left[u_{j\alpha}(\underline{\pi}_\mu) - q_j(\underline{\pi}_\mu)\right] - \left[u_{j\alpha}(\underline{\pi}^*) - q_j(\underline{\pi}^*)\right]\right| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\frac{1}{\lambda_{(\mu)}} < \frac{\epsilon}{2}$. Agregando $u_{j\alpha}(\underline{\pi}_\mu) - q_j(\underline{\pi}_\mu) + \frac{1}{\lambda_{(\mu)}} < 0$, que es simplemente $\phi_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) < 0$, cada vez que $\phi^{+}_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) = 0$, cada vez que $C'_{j\alpha}(\underline{\pi},\lambda) = 0$. De esta última ecuación, sabemos que $e_{j\alpha}$ no es usada en π_μ, ya que $\pi_\mu = \sum_\alpha e_{j\alpha} C'_{j\alpha}(\underline{\pi}_\mu, \lambda)$, porque $\underline{\pi}_\mu$ es un punto fijo. Y ya que $\underline{\pi}_\mu \mapsto \underline{\pi}^*$, $e_{j\alpha}$ no es usada en $\underline{\pi}^*$, lo que contradice nuestro supuesto. Por lo tanto $\underline{\pi}^*$ es un punto de equilibrio. $\square$

Referencias

[1] Ángel F. Tenorio. Un paseo por la historia de la teoría de juegos. *Boletín de Matemáticas*, 2015.

[2] Hans Peters. *Game Theory A Multi-Leveled Approach*. Springer Texts in Business and Economics. Springer-Verlag, second edition, 2015.

[3] OECD. *Economic Surveys: Mexico 2019*. 2019.

[4] Sean Dougherty. The determinants of informality in mexico's states. 2013.

[5] Chiara Binelli. Wage inequality and informality: evidence from mexico. *IZA Journal of Labor Development*, 2016.

[6] CEFP. Impacto fiscal de la economía informal en méxico, junio 2018.

[7] John F. Nash. Non-cooperative games. page 30, 1950.

[8] Ariel Rubinstein Martin J. Osborne. *A Course in Game Theory*. Massachusetts Institute of Technology, 1994.

[9] Martin J. Osborne. *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, 2000.

[10] Ferenc Szidarovszki Akio Matsumoto. *Game Theory and Its Applications*. Springer Japan, first edition, 2016.

[11] N. Gregory Mankiw. *Principios de Economía*. CENGAGE Learning, seventh edition, 2017.

[12] Simone Vanuccini Uwe Cantner, Ivan Savin. Replicator dynamics in value chains: Explaining some puzzles of market selection. 2016.

[13] Nathalia Almeida de Souza Ricardo Azevedo Araujo. An evolutionary game theory approach to the dynamics of the labour market: A formal and informal perspective. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2010.

[14] INEGI. Encuesta nacional de ocupación y empleo (enoe), población de 15 años y más de edad, 2020.

[15] INEGI. Tasa de informalidad laboral 1. series desestacionalizadas, 2020.

[16] INEGI. Censos económicos 2019; resultados definitivos, julio 2020.

[17] INEGI. Censos económicos 2019 metodología, 2020.

[18] INEGI. Módulo de condiciones socioeconómicas (mcs) 2015, 2015.

[19] IMSS. Valuación actuarial del seguro de invalidez y vida. Technical report, 2020.

[20] IMSS. Valuación actuarial del seguro de riesgos de trabajo. Technical report, 2020.

[21] Banco de México. Sistema de informaciÓn econÓmica: Inflación, 2020.

[22] Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. Ley del impuesto sobre la renta; última reforma, diciembre 2019.

[23] Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. Ley del seguro social; última reforma, noviembre 2019.

[24] Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. Código fiscal de la federación; última reforma, diciembre 2019.

[25] Secretaría del Trabajo y Previsión Social. Salarios mínimos 2020, 2020.

[26] Yahoo Finanzas. Ipc mexico (ˆ mxx), 2020.

[27] Shailendra K. Saxena (Editor). *Coronavirus Disease 2019 (COVID-19)*. Springer, 2020.

[28] Miguel Ángel Martínez García David Robles Ortiz. Determinantes principales de la informalidad: un análisis regional para méxico. *Región y Sociedad*, 2016.

[29] William Samuelson (Editor) Kalyan Chatterjee (Editor). *Game Theory and Business Applications*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, second edition, 2014.

[30] Santiago Levy Algazi. *Esfuerzos mal recompensados - La elusiva búsqueda de la prosperidad en México*. Banco Interamericano de Desarrollo, first edition, julio 2018.