**A.1 Demostración de la aproximación de un seguro continuo con uno discreto**

$$\bar{A}_{x:n} = \int_0^n V^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \quad \text{seguro continuo}$$

$$A_{34:31} = \sum_0^{n-1} V^{k+1} \, {}_k p_x q_{x+k} \quad \text{seguro discreto}$$

Para llegar a la aproximación partimos del seguro continuo y desarrollamos.

$$\bar{A}_{x:n} = \int_0^n V^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} V^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Ahora hacemos un cambio de variable: s = t-k y ds = dt

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 V^{s-k} \, {}_{s+k} p_x \mu_{x+k+s} ds$$

Si sacamos los términos que no dependen de s nos queda así:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} V^{k+1} \, {}_k p_x \int_0^1 V^{s-1} \, {}_s p_x \mu_{x+k} ds$$

Suponemos Uniformidad de Muertes y tenemos:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} V^{k+1} \, {}_k p_x \int_0^1 V^{s-1} q_{x+k} ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} V^{k+1} \, {}_k p_x q_{x+k} \int_0^1 V^{s-1} ds$$

Ahora si vemos bien, la sumatoria es un seguro discreto y la integral si la desarrollamos nos da:

$$\int_0^1 V^{s-1} ds = V^{-1} \int_0^1 V^s ds = \frac{1}{V} \bar{a}_1 = \frac{1-e^{-\delta}}{V\delta} = \frac{1-V}{V\delta} = \frac{iV}{V\delta} = \frac{i}{\delta}$$

Por lo tanto finalmente nos queda:

$$\overline{A}_{x:n} = \frac{i}{\delta} A_{x:n}$$

**A.2 Demostración de la ecuación de mortalidad en *m-ésimos***

La siguiente formula utiliza una probabilidad de vida en *m-ésimos* la cual no es posible conseguir en tablas de mortalidad por lo que tuvimos que recurrir a una aproximación la cual se demostrara más adelante.

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} \, {}_{h/m}p_x \qquad \text{(A.1)}$$

Como la probabilidad de muerte en m-ésimos no la conocemos se hace una aproximación con la fórmula que es:

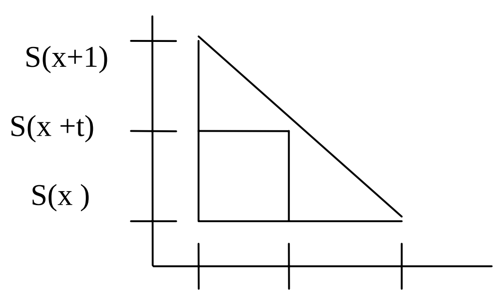
$${}_y q_{x+t} = \frac{y q_x}{1 - t q_x} \qquad \text{(A.2)}$$

Sabemos que:

$${}_t q_x = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \qquad \text{(A.3)}$$

Para demostrar la fórmula (3) utilizamos la función de sobre vivencia S(x) y nos apoyamos de la interpolación lineal para encontrar el punto que no conocemos que es S(x + t) demostraremos lo que deseamos.

A continuación se muestra la gráfica de la interpolación para aplicar la fórmula de los catetos y así encontrar el punto que nos interesa que es S(x + t):



X x + t x + 1

Y la fórmula de los catetos queda así:

$$\frac{S(x+1)-S(x)}{x+1-x} = \frac{S(x+t)-S(x)}{x+t-x} \qquad (A.4)$$

Ahora simplemente despejamos S(x+t) y desarrollamos la ecuación a manera de que nos quede algo conocido

$$t*S(x+1)+S(x)(1-t) = S(x+t) \qquad (A.5)$$

Ahora sustituimos (5) en (3) y entonces podemos obtener lo siguiente:

$${}_{t}q_{x} = \frac{S(x)-[t*S(x+1)+S(x)(1-t)]}{S(x)}$$

$$= \frac{t*[S(x)-S(x+1))]}{S(x)} = tq_{x} \qquad (A.6)$$

Una vez demostrado lo anterior ahora procedemos a utilizar la misma fórmula pero con diferentes subíndices que es ${}_{y}q_{x+t} = \frac{S(x+t)-S(x+t+y)}{S(x+t)}$ (A.7)

y sustituimos lo que ya conocemos.

$${}_{y}q_{x+t} = \frac{[t*S(x+1)+S(x)(1-t)]-[(t+y)S(x+1)+S(x)(1-t-y)]}{[t*S(x+1)+S(x)(1-t)} \qquad (A.8)$$

Hacemos algunas operaciones algebraicas para poder llegar a un resultado conocido y hacemos un truco que consiste en dividir las dos partes integrantes de la división entre el mismo cociente para que no sea afectada y poder tener un resultado conocido como se muestra a continuación:

$$= \frac{[t(S(x+1)-S(x+1)]+y[S(x)-S(x+1)] \big/ S(x)}{[t*S(x+1)+S(x)(1-t) \big/ S(x)} \qquad (A.9)$$

$$= \frac{y[S(x) - S(x+1)] \big/ S(x)}{t[S(x+1) - S(x)] \big/ S(x) + S(x) \big/ S(x)} \qquad \text{(A.10)}$$

Finalmente tenemos como resultado: $\quad {}_y q_{x+t} = \dfrac{yq_x}{1 - tq_x}$ (A.11)

gracias a los resultados de las operaciones y el truco que nos dan ecuaciones iguales a las antes descritas.

Por lo tanto se logró demostrar la ecuación que se ocupa para la aproximación de mortalidades en *m-ésimos.*