

CÁPITULO 3. METODOLOGÍA.

Para el cálculo de un plan de pensiones se necesita tomar en cuenta demasiadas variables ya mencionadas, como lo son las hipótesis biométricas, las hipótesis demográficas y las hipótesis financieras, así como el cálculo de los diferentes variables actuariales que nos ayudan a constituir el plan, de tal manera que el valor presente actuarial de las aportaciones sea igual al valor presente actuarial de los beneficios, cálculos que explicaremos a lo largo de este capítulo.

3.1 Hipótesis

Las hipótesis biométricas son estadísticas extraídas en gran parte del IMSS y del ISSSTE, debido a que estas instituciones son las que más contacto tienen con las empresas y las que más confiabilidad tienen en sus estudios estadísticos sobre estos datos. Las bases de datos de las hipótesis biométricas están constituidas con la siguiente información:

- Edad del empleado.
- Probabilidad de muerte de hombre a esa edad.
- Probabilidad de muerte de mujer a esa edad.
- Probabilidad de muerte de una persona que se ha jubilado.
- Probabilidad de muerte de una persona que se ha invalidado.
- Probabilidad de rotación del personal por separación/despido.
- Promedio de hijos que una persona puede tener a esa edad.

- Probabilidad de estar casado.
- Edad correlativa hombre.
- Edad correlativa mujer.
- Índice de masculinidad a esa edad.

Las hipótesis demográficas se toman de instituciones de igual confiabilidad como lo es el INEGI, la CONAPO, y al igual que en las hipótesis biométricas utilizamos la información del IMSS y del ISSSTE. Para estas hipótesis solo se utilizarán proyecciones de crecimiento en el número de afiliados a la Institución.

Mientras que las hipótesis financieras son extraídas de despachos y consultorías profesionales que tienen la experiencia para determinar los supuestos que se deben de utilizar para los estudios.

3.2 Probabilidades de Decremento

Para el cálculo de las pensiones se tiene que tomar en cuenta las probabilidades de que una persona abandone el plan de pensiones por cualquier causa, la notación para dichas causas es la siguiente y se presentan las causas que se utilizarán para calcular los planes de pensiones:

$${}_n q_{x+h}^j, \text{ con } j = a, b, c, d, f, \text{ y donde:}$$

$x+h =$	Es la edad actual de la persona.
$n =$	Los años transcurridos.
$q^j =$	Es la probabilidad de dejar el plan por la causa j .
$j =$	Es la causa de salida.
$a =$	Invalidez.
$b =$	Rotación (despido).
$c =$	Rotación (separación).
$d =$	Incapacidad permanente.
$f =$	Muerte.

Para el cálculo de cada una de las $n Q_{x+h}^j$ se utilizarán las tablas de conmutados obtenidas

de las hipótesis biométricas, quedando las fórmulas de la siguiente manera:

$$n Q_{x+h}^{\text{Invalidez}} = P(\text{invalidez})$$

$$n Q_{x+h}^{\text{Rotacion (des)}} = P(\text{rotación}) * \text{Factor de Ajuste (Despido (20\%))}$$

$$n Q_{x+h}^{\text{Rotacion (sep)}} = P(\text{rotación}) * \text{Factor de Ajuste (Separación (80\%))}$$

$${}^n \overset{\text{Incapacidad}}{\mathbf{Q}}_{x+h} = P(\text{incapacidad}) * \text{Factor de Ajuste (varia por profesión)}$$

$${}^n \overset{\text{Muerte}}{\mathbf{Q}}_{x+h} = P(\text{muerte}) * \text{Factor de Ajuste (varia por profesión)}$$

O bien se pueden calcular estas probabilidades de decremento por medio de las probabilidades de seguir dentro del plan con las fuerzas de decremento de cada causa de la siguiente manera:

$${}_t P_x^j = e^{-\int_0^t \mu_x^{(j)}(s) ds} \quad (3.1)$$

Donde la fórmula nos indica la probabilidad de quedar dentro del plan debido a la causa j , entre edades x y $x+t$, entonces la probabilidad de no sobrevivir a dicha causa es la siguiente:

$${}^n \overset{j}{\mathbf{Q}}_x = 1 - {}_t \overset{j}{\mathbf{P}}_x \quad (3.2)$$

Ahora bien, para calcular la probabilidad total de que una persona se salga del plan de pensiones es la sumatoria de las probabilidades de salir del plan de cada una de las causas esto es:

$${}_n q_{x+h}^{(T)} = \sum_{j=1}^5 {}_n q_{x+h}^j, \quad (3.3)$$

Sabiendo esto podemos determinar nuestra probabilidad total de decremento de la siguiente manera:

$${}_n q_{x+h}^{(T)} = {}_n q_{x+h}^{Invalidez} + {}_n q_{x+h}^{Rotacion (des)} + {}_n q_{x+h}^{Rotacion (sep)} + {}_n q_{x+h}^{Incapacida d} + {}_n q_{x+h}^{Muerte} \quad (3.4)$$

Teniendo nuestras probabilidades de salida del plan para cada individuo, lo que procede es calcular las probabilidades de los decrementos múltiples que son las q' y estas son las siguientes:

$${}_n q_{x+h}'^{Invalidez} = {}_n q_{x+h}^{Invalidez} / (1 + (0.5 * ({}_n q_{x+h}^{Rotación (des)} + {}_n q_{x+h}^{Rotación (sep)} + {}_n q_{x+h}^{Incapacida d} + {}_n q_{x+h}^{Muerte}))) \quad (3.5)$$

Esto es la probabilidad real que tiene el individuo de salir de la institución que se está evaluando por la causa determinada, es decir, si haber salido antes en el mismo año por otras causas. Este proceso se repite para cada causa y para cada edad.

3.3 Tablas de Vida

Ya que tenemos las q' el siguiente paso es saber los valores de las l_x para cada edad de los integrantes del plan, donde las l_x es el número de integrantes que siguen en el plan en el año x y tomaremos el valor inicial de nuestra población como 10,000. Las l_x con decremento se calculan de la siguiente manera:

$$l_x^j = l_{x-1}^{(T)} * (1 - n q'_{x-1}^j), \text{ donde:} \quad (3.6)$$

$l_{x-1}^{(T)}$ =	Población restante total de la edad anterior.
-------------------	---

Así mismo se calculan las l_x sin decremento de la siguiente manera:

$$l_x^j = l_{x-1}^j * (1 - n q_{x-1}^j), \text{ donde:} \quad (3.7)$$

l_{x-1}^j =	Población restante por la causa j de la edad anterior.
---------------	--

También se debe de calcular las dx (muertes) con decremento, y esto se hace de la siguiente manera:

$$d_x^{\prime j} = l_x^{(T)} * ({}_n q_x^{\prime j}), \quad (3.8)$$

Ahora calculamos las dx sin decremento:

$$d_x^j = l_x^j * ({}_n q_x^j). \quad (3.9)$$

Podemos expresar las probabilidades y decrementos en términos de tablas de vida, como se presenta a continuación:

$$1 - {}_t P_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = {}_t q_x \quad (3.10)$$

Se debe mencionar que estos datos que acabamos de crear son solo para un solo grupo de personas, ya sean hombres, mujeres, etc. este proceso se debe de repetir con todos los grupos como lo son: hombres, mujeres, jubilados e inválidos. Los cambios que se deben de efectuar son solo sobre las probabilidades de vida que se encuentran en las hipótesis biométricas.

3.4 Incrementos Salariales

Otro dato que se debe de tener para el cálculo de un plan de pensiones es el incremento al salario de cotización proyectado a 100 años. Para esto tenemos nuestra tabla de incremento salarial proporcionada por el INEGI, de donde obtendremos nuestros incrementos por medio de la siguiente fórmula:

$$\text{IncSC}_x = \text{IncSC}_{x-1} * (1 + S_x), \text{ donde:} \quad (3.11)$$

$\text{IncSC}_x =$	Factor de incremento al salario de cotización en el año x.
$\text{IncSC}_{x-1} =$	Factor de incremento al salario de cotización en el año x-1. Incremento acumulado hasta el año x-1.
$S_x =$	Incremento salarial para el año x, expresado en decimales.

El incremento salarial mínimo se calcula de igual manera pero solo cambia el hecho de que para el cálculo del salario de cotización normal se utilizaba la columna 2 y ahora se utilizará la primera columna.

3.5 Trabajadores

A continuación veremos como se realizan los cálculos para:

- El número de trabajadores activos por generación del personal actualmente activo
- El número de trabajadores activos por generación de la Nuevas Generaciones
- Las jubilaciones esperadas actuariales totales
- Las jubilaciones esperadas aritméticas de la generación actual

Para el cálculo de estas operaciones la empresa a la que se la hará la valuación deberá entregar una base de datos con las especificaciones ya mencionadas en el capítulo 2, esto para definir las siguientes variables:

Y =	Edad de jubilación del empleado.
Y1 =	Variable utilizada antes de llegar a y.
X =	Edad actual del trabajador.
Z =	Edad de ingreso del empleado.
Z1 =	Años de servicio mínimo para jubilarse.
AR =	Antigüedad requerida para el retiro.
ER =	Edad requerida para el retiro.

3.5.1 Edad de Jubilación para cada Trabajador

Para cada trabajador se calcula la edad de jubilación. Debido a que este cálculo depende de cada plan, nos enfocaremos a este ejemplo, ya que es la información que nosotros obtuvimos y se calcula de la siguiente manera:

Si $((Z+Z1) \leq ER) \Rightarrow Y1=Z+Z1$. si no;

Si $((ER-Z1)+1) \leq Z \wedge (Z \leq ((ER-Z1)+4)) \wedge ((Z+Z1) > ER) \Rightarrow Y1= (Z+Z1)$ si no;

Si $((ER-Z1)+5) \leq Z \wedge (Z \leq ((ER-Z1)+9)) \wedge ((Z+Z1) > ER) \Rightarrow Y1= (Z+Z1)-2$ si no;

Si $((ER-Z1)+10) \leq Z \wedge (Z \leq ((ER-Z1)+14)) \wedge ((Z+Z1) > ER) \Rightarrow Y1= (Z+Z1)-4$ si no;

Si $((ER-Z1)+15) \leq Z \wedge ((Z+Z1) > ER) \Rightarrow Y1= (Z+Z1)-5$ si no;

$Y1=Z+Z1$

Entonces:

$Y=Y1;$

Si $Y < X \Rightarrow Y=X$

Si $(Y > (Z+AR)) \Rightarrow Y=Y$ si no;

$Y =Z+AR$

Si $Y \geq 100 \Rightarrow Y=99$

Con esto encontramos la edad de jubilación del trabajador y así usaremos esta información para determinar cuando se jubilará cada trabajador y obtendremos también la probabilidad de que se jubile y así tendremos nuestros resultados de las jubilaciones esperadas.

3.5.2 Número de Trabajadores Activos por Generación del Personal

Actualmente Activo

A continuación calcularemos el número de trabajadores activos por generación del personal actualmente activo. Primero definiremos las variables que utilizaremos para el cálculo para seguir con las fórmulas.

NTAPG =	Número de trabajadores activos por generación.
X =	Edad actual del trabajador.
Y =	Edad de jubilación del trabajador.
B =	Año de estudio dentro del ciclo.
Ae =	Año de estudio inicial.
Bex =	$X+B-Ae$.
Lxcd =	Tabla de sobrevivientes con decremento.
NPS =	Nivel de probabilidad de Salida.
APS =	Acumulado de probabilidad de salida (.25, .45, .6, .7, .8, .9, .95, 1, 1).
NNTAPG =	Número de trabajadores activos por generación.

El cálculo se realiza de la manera siguiente:

Si $B_{ex} \leq y \Rightarrow NNTAPG = \ell_{B_{ex}}^{(T)} / \ell_x^{(T)}$ **si no;**

Si $y \leq B_{ex} \Rightarrow y = 0$ **si no;**

$NNTAPG=0$

Entonces, ya teniendo todos los resultados de cada uno de los inscritos en el plan hacemos la sumatoria de estos con su respectivo resultado y eso nos da el número de trabajadores activos por generación. Así:

$$NTAPG = \sum_{i=1}^n NNTAPG_i . \quad (3.12)$$

3.5.3 Número de Trabajadores Activos Totales

Ahora bien, para el cálculo del número de trabajadores activos totales se define lo siguiente:

Nttb =	Número de trabajadores totales del año b.
NE =	Número de empleados a evaluar.
Tip =	Tabla de incremento poblacional.

Y para el cálculo se realiza lo siguiente:

Si $B=A_e \Rightarrow Nttb=NE$ **si no;**

$$Nttb = Nttb * (1 + \text{Tip } [B - Ae] / 100).$$

3.5.4 Jubilaciones Esperadas Actuariales

Ahora se presenta el cálculo para las jubilaciones esperadas actuariales de los trabajadores activos actuales:

JEA =	Jubilaciones esperadas actuariales.
PS =	Probabilidad de salida.

Si $B_{ex} < y \Rightarrow JEA = 0$ **si no;**

Si $y = B_{ex} \Rightarrow JEA = lx / ly$ **si no;**

Si $y < B_{ex} \Rightarrow JEA = 0.$

3.5.5 Otros Cálculos para Trabajadores

Se deben de hacer los mismos cálculos que se acaban de explicar pero ahora para las nuevas generaciones, lo cual es muy parecido a lo que se acaba de ver pero con un factor demográfico que nos crea las nuevas generaciones llamado B_x . Estos cálculos no tienen caso escribirlos ya que tienen un gran parecido a los cálculos anteriores solamente cambia la población con los factores demográficos ya mencionados. Los cálculos que se deben de hacer son los siguientes:

- Cálculo del número de trabajadores activos por generación de las nuevas generaciones.
- Cálculo de la edad promedio de las nuevas generaciones.
- Cálculo de las jubilaciones esperadas actuariales de las nuevas generaciones.
- Cálculo de las jubilaciones esperadas aritméticas de los trabajadores activos actuales.
- Cálculo del número de trabajadores con derecho adquirido a pensión de la generación actual.
- Cálculo de nuevos promedios.

3.6 Valor Presente

Teniendo los datos ya explicados, nos falta solo la parte financiera para complementar el estudio actuarial, esto es, los valores presente y las fórmulas que se utilizarán para después combinar estos con los datos demográficos ya obtenidos y así poder calcular los beneficios de los pensionados, y calcular así las reservas que se deben crear para mantener estable al sistema de pensiones. A continuación se presentará el cálculo de los valores presentes, las anualidades y los beneficios.

Empezaremos con la notación de un valor presente el cual se denota de la siguiente manera para una unidad monetaria:

$$v^k = \frac{1}{(1+i)^k}, \text{ donde} \quad (3.13)$$

k =	Son los años que se regresara el dinero.
i =	Es el interés que se utilizara usando las hipótesis financieras ya definidas.

3.7 Anualidades de Vida

Ahora bien tenemos que definir una anualidad de vida como una serie de pagos hechos continuamente durante intervalos de tiempo iguales, mientras el individuo sobreviva, esto con el fin de hacer frente a las obligaciones futuras cuando al individuo se le otorgue una pensión. La fórmula de la anualidad para una unidad monetaria que paga al principio de cada año se presenta a continuación:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x, \text{ donde:} \quad (3.14)$$

${}_k p_x =$	Probabilidad que una persona de edad x llegue con vida a edad $x+k$.
--------------	---

Esta anualidad paga al principio de cada año y se conoce como anualidad vitalicia anticipada, pero lo que nosotros necesitamos es una anualidad que pague al final de cada

año así que buscamos una anualidad vitalicia vencida y ahora se presenta la fórmula de una unidad monetaria para esta anualidad.

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x . \quad (3.15)$$

Con esto se calcularán también las prestaciones para flujos y el valor presente de las prestaciones para jubilados así como las de los trabajadores activos que estén inscritos en el plan.

3.8 Beneficios

Nuestro siguiente paso, ya habiendo entendido lo demográfico y lo financiero y las anualidades, es entender el beneficio para los trabajadores, el cual esta definido como la obligación del patrón a otorgar un sueldo como seguridad social una vez que el trabajador haya cumplido con sus obligaciones y este no pueda seguir cumpliendo con sus labores debido a causas diversas. El beneficio se calcula para saber cual será la aportación que los trabajadores y el patrón tendrán que dar durante sus años de servicio para poder hacer frente a las obligaciones cuando se les tenga que otorgar este beneficio de forma vitalicia. Primero veremos el beneficio para jubilados y para sus beneficiarios, y se calcula de la siguiente manera:

$$B_{\text{jubilados}} = SCA * \frac{IncSC [Bex]}{IncSC [0]} * \frac{l_{ycd}^{(T)}}{l_{xcd}^{(T)}} * \frac{l_x^{Bex}}{l_x^y} . \quad (3.16)$$

Donde: si $y > Bex$ entonces $B = 0$.

$B_{jubilados} =$	Beneficio para jubilados.
$SCA =$	Salario de cotización diario.
$IncSal[Bex] =$	Factor de incremento salarial para el año Bex.
$IncSal[0] =$	Factor de incremento salarial en el año 0.
$l_x^{Bex} =$	Número de sobrevivientes en edad Bex.
$l_x^y =$	Número de sobrevivientes en edad y.

Seguimos con el cálculo de la pensión al beneficiario de un jubilado si es que tiene. Este es:

$$B_{jubilados_ben} = SCA * \frac{IncSa [Bex]}{IncSal [0]} * \frac{l_x^y - l_x^{Bex}}{l_x^y} * \frac{l_{ycd}^{(T)}}{l_{xcd}^{(T)}} * \frac{l_{Bex(corre)sd}^{(muerte)}}{l_{y(corre)sd}^{(muerte)}} * Cas (Bex - 1)$$

Donde: si $y > Bex$ entonces $B = 0$. (3.17)

$B_{jubilados_ben} =$	Beneficio para beneficiarios de jubilados.
$SCA =$	Salario de cotización diario.
$IncSal[Bex] =$	Incremento salarial para el año Bex.
$IncSal[0] =$	Incremento salarial en el año 0.
$l_x^{Bex} =$	Número de sobrevivientes en edad Bex.
$l_x^y =$	Número de sobrevivientes en edad y.
$l_{ycd}^{(T)} =$	Número de sobrevivientes totales con decremento en

	edad correlativa de y.
$l_{xcd}^{(T)} =$	Número de sobrevivientes totales con decremento en edad correlativa de x.
$l_{Bex(corre)sd}^{(muerte)} =$	Número de sobrevivientes sin decremento por causa de muerte en edad correlativa de Bex.
$l_{y(corre)sd}^{(muerte)} =$	Número de sobrevivientes sin decremento por causa de muerte en edad correlativa de y.
$Cas(Bex-1) =$	Probabilidad de estar casado en edad Bex.

Este procedimiento se realiza para jubilados, hombres, mujeres, por las diferentes causas. Existen variaciones en los cálculos pero no se mencionan ya que son muchos y las diferencias son mínimas. Así mismo se debe de calcular para beneficio de activos por invalidez, muerte y retiro, y al igual que siempre, para hombres y mujeres, y se repite el proceso para las nuevas generaciones.

Para calcular el beneficio anual se debe de multiplicar el pago diario que se otorga al trabajador como beneficio por 360. Para obtenerlo se hace de la manera siguiente:

$$B = 360 * B_d, \text{ donde:} \quad (3.18)$$

$B_d =$	Pago que se efectúa diario.
---------	-----------------------------

Este procedimiento, al igual que los demás, se debe crear para cada persona, esto es que cambia dependiendo del sexo, o de la incapacidad así que se debe de crear con las diferentes tablas que ya habíamos creado para mujeres, hombres, pensionados e incapacitados, para así hacer más exacto el cálculo de los beneficios.

3.9 Valor Presente Actuarial

Una vez obtenidos los beneficios de cada trabajador ahora pasaremos a calcular el valor presente actuarial de las obligaciones que tenemos para cada trabajador y el total de los pasivos contingentes que tiene la institución a estudiar. La fórmula que se utilizará se presenta a continuación:

$$VPA = v^k \cdot B, \text{ donde:} \quad (3.18)$$

$v^k =$	Valor presente de una unidad monetaria k años después.
$k =$	Número de años que aportó al plan.
$B =$	El beneficio que le corresponde al pensionado.

Esta fórmula se puede explicar como la suma de anualidades que pagan al final de cada $m/360$ días, un beneficio (B). Estas anualidades están multiplicadas por la probabilidad de que el trabajador sobreviva a todas las causas, de edad x a y , debido a que el trabajador deberá llegar a esa edad de jubilación para que se le otorgue esa pensión, a menos que existan beneficiarios por muerte mientras el trabajador aporte al plan (pero eso se explicará

en los próximos capítulos), datos que están incluidos en la fórmula (3.15) de beneficio. Y tenemos v^k , que sirve para traer a valor presente dichas anualidades y así considerar los pagos en la fecha de valuación del plan.

La anualidad incluida en la fórmula es la que pagará de forma vitalicia la pensión al beneficiario.

3.10 Aportaciones

Para el cálculo de las aportaciones, que debe recibir el fondo, se debe recordar que habíamos mencionado que, en la prima media general, el valor presente actuarial de las aportaciones debe de ser igual al valor presente actuarial del pasivo de pensiones, así que nos queda la siguiente fórmula:

$$VPA = C \cdot a_{x:y|}^{(m)}, \quad (3.19)$$

Despejando la contribución de la fórmula anterior, se obtiene:

$$C = \frac{VPA}{a_{x:y|}^{(m)}}, \text{ donde:} \quad (3.20)$$

VPA =	Valor presente actuarial de los beneficios.
-------	---

$Y =$	Edad de jubilación.
$C =$	Monto de la contribución anual.
$a_{x:\overline{y} }^{(m)} =$	Anualidad que paga un m-ésimo al final de cada m/360 días, desde edad x hasta edad y .

3.11 Reserva

El valor presente actuarial de las contribuciones lo expresamos como una anualidad temporal, donde el trabajador empezará a aportar desde edad x hasta la edad de jubilación, esto si el trabajador permanece inscrito en el plan.

Para la creación de las reservas cabe mencionar que utilizaremos los beneficios y las contribuciones adquiridas año con año.

Para entender el cálculo de la reserva anual primero debemos definirla como la cantidad de dinero que se necesita tener cada año para hacer frente a los gastos o pagos futuros para los trabajadores que aportaron durante ese año. Este factor se obtiene de multiplicar la reserva del año anterior por 1 más el interés, para tener los valores año con año.

Así nuestra reserva del año en curso nos queda de la siguiente manera:

$${}_xV = ({}_{x-1}V + C_{x-1} - B_{x-1}) \cdot (1 + i_a), \text{ donde:} \quad (3.21)$$

${}_xV=$	Reserva en el año en curso x.
${}_{x-1}V=$	Reserva del año anterior.
$B_{x-1} =$	Beneficios pagados durante el año x-1.
$C_{x-1} =$	Contribuciones realizadas durante el año x-1.
$i_a =$	Tasa anual de acumulación del fondo.

Esto significa que la reserva terminal para el año de estudio es igual a la reserva terminal del año anterior sumándole todas las aportaciones que se hicieron al plan durante ese año y restándole los beneficios o deudas que se pagaron durante ese año.